

К.К. ПОНОМАРЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

2 ЧАСТЬ



К. К. ПОНОМАРЕВ

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ ТЕХНИКОВ- ПРОГРАММИСТОВ Ч. II

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
АНАЛИЗ

Допущено МВ и ССО РСФСР
в качестве учебника для техникумов
по специальности
«Программирование для быстродействующих
математических машин»



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1974

517.2

П 56

УДК 517 (075)

Пономарев К. К.

П 56 Курс высшей математики для техников-программистов. Ч. II. Математический анализ. Учебник для техникумов. М., «Выш. школа», 1974.

415 с. с илл.

Учебник составлен в соответствии с программой по высшей математике для техников-программистов. Часть II посвящена математическому анализу. Перечень тем охватывает весь теоретический материал, необходимый будущим программистам в их дальнейшей практической деятельности.

Большинство примеров сопровождается подробными решениями, включены задачи для самостоятельного решения. Изложение материала привлекает своим высоким теоретическим и методическим уровнем.

Предназначается для учащихся средних специальных учебных заведений.

П $\frac{20203-166}{001 (01)-74}$ 249—74

517.2

Рецензенты:

доцент **Я. М. Шабловский,**

Г. Б. Шнайдер (Московский приборостроительный техникум).

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Глава IX

Основные теоремы дифференциального исчисления. Исследование функций и построение их графиков

8

§ 1. Экстремум функции	8
§ 2. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши	9
§ 3. Необходимый признак экстремума	15
§ 4. Достаточные признаки экстремума (использование первой и второй производной)	18
§ 5. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции	22
§ 6. Теоремы о возрастании и убывании функции в интервале	27
§ 7. Выпуклость и вогнутость графика функции	30
§ 8. Точки перегиба. Отыскание точек перегиба и интервалов выпуклости и вогнутости функции	31
§ 9. Асимптоты графика функции	33
§ 10. Общая схема исследования и построения графиков функций	37
§ 11. Общий метод определения предела отношения двух бесконечно малых и бесконечно больших величин. Правило Лопиталя	42

Глава X

Неопределенный интеграл

50

§ 1. Первообразная функция и неопределенный интеграл	50
§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла	53
§ 3. Таблица основных интегралов. Непосредственное интегрирование	55
§ 4. Интегрирование способом замены переменной (интегрирование подстановкой)	61

Глава XI

Методы интегрирования

69

§ 1. Интегрирование по частям	69
§ 2. Интегрирование рациональных функций. Формула приведения	74
§ 3. Интегрирование тригонометрических функций	86
§ 4. Интегрирование функций, рационально зависящих от тригонометрических функций	97
§ 5. Интегрирование простейших иррациональных функций	102
§ 6. Подстановки Эйлера	109
§ 7. Интегрирование биномиальных дифференциалов	114

Глава XII

Определенный интеграл

118

§ 1. Понятие определенного интеграла	118
§ 2. Задачи, приводящие к определенному интегралу	118
§ 3. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Суммы Дарбу	120
§ 4. Связь между определенным и неопределенным интегралами. Формула Ньютона—Лейбница	125
§ 5. Простейшие свойства определенных интегралов	128

	<i>Стр.</i>
§ 6. Методы вычисления определенного интеграла	132
§ 7. Приближенное интегрирование	140
§ 8. Связь дифференциального и интегрального исчислений . .	151
 <i>Глава XIII</i>	
Несобственные интегралы	154
§ 1. Обобщение понятия определенного интеграла	154
§ 2. Интегралы по бесконечному интервалу	154
§ 3. Интегралы от функций, имеющих конечное число точек разрыва	160
§ 4. Геометрический смысл несобственных интегралов	164
 <i>Глава XIV</i>	
Геометрические и механические приложения определенного интеграла	169
§ 1. Вычисление площади в прямоугольных координатах . . .	169
§ 2. Вычисление площади в полярных координатах	175
§ 3. Вычисление объема тела	177
§ 4. Длина дуги плоской кривой	181
§ 5. Площадь поверхности вращения	186
§ 6. Физико-технические применения определенных интегралов	194
 <i>Глава XV</i>	
Числовые ряды	217
§ 1. Числовой ряд, сходимость и сумма ряда	217
§ 2. Необходимый признак сходимости ряда	219
§ 3. Бесконечная геометрическая прогрессия	219
§ 4. Гармонический ряд	220
§ 5. Свойства рядов	221
§ 6. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами	222
§ 7. Знакопеременные ряды. Оценка остатка ряда	230
§ 8. Знакопеременные ряды	233
§ 9. Абсолютная и условная сходимость рядов	234
§ 10. Действия над рядами	235
 <i>Глава XVI</i>	
Функциональные ряды	238
§ 1. Степенные ряды	238
§ 2. Теорема Абеля	238
§ 3. Радиус и промежуток сходимости степенного ряда	240
§ 4. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда . .	242
§ 5. Формула Тейлора	243
§ 6. Ряды Тейлора и Маклорена	246
§ 7. Признак разложимости функции в ряд Тейлора	247
§ 8. Разложение функций в степенные ряды	247
§ 9. Вычисление приближенных значений функций с помощью степенных рядов	252
§ 10. Приближенное вычисление интегралов с помощью степенных рядов	257
§ 11. Приближенное решение алгебраических и трансцендентных уравнений с помощью степенных рядов	260
 <i>Глава XVII</i>	
Тригонометрические ряды	263
§ 1. Периодические функции. Тригонометрические ряды	263
§ 2. Коэффициенты Фурье данной функции. Ряд Фурье	265
§ 3. Достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье	268

	<i>Стр.</i>
§ 4. Разложение в ряд Фурье непериодической функции	269
§ 5. Ряды Фурье для четных и нечетных функций	271
§ 6. Разложение в ряд Фурье функций с произвольным периодом $2l$	278
§ 7. Практический гармонический анализ	282
 <i>Глава XVIII</i>	
Функции многих переменных	284
§ 1. Функции двух и нескольких переменных. Способы задания, символика. Область определения	284
§ 2. Геометрическое изображение функций двух переменных. Линии уровня	285
§ 3. Понятие о пределе функции двух переменных	288
§ 4. Непрерывность функции нескольких переменных	290
§ 5. Частные производные функции нескольких переменных	292
§ 6. Геометрический смысл частных производных функций двух переменных	293
§ 7. Частные дифференциалы. Полный дифференциал	294
§ 8. Дифференцируемость функции нескольких переменных	298
§ 9. Приложение полного дифференциала к приближенным вычислениям	299
§ 10. Дифференцирование сложных функций	303
§ 11. Неявные функции нескольких переменных. Дифференцирование неявных функций	306
§ 12. Полная производная. Инвариантность формы полного дифференциала функции	309
§ 13. Частные производные высших порядков, их независимость от последовательности дифференцирования	311
§ 14. Дифференциалы высшего порядка функции двух переменных	314
§ 15. Применение частных производных	317
§ 16. Ряд Тейлора для функций многих переменных	320
§ 17. Экстремум функции нескольких переменных. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции	324
 <i>Глава XIX</i>	
Двойные интегралы	330
§ 1. Двойной интеграл	330
§ 2. Теорема существования двойного интеграла от непрерывной функции	332
§ 3. Геометрический и физический смысл двойного интеграла	332
§ 4. Свойства двойного интеграла	333
§ 5. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах	336
§ 6. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах	348
 <i>Глава XX</i>	
Геометрические и механические приложения двойных интегралов	353
§ 1. Площадь плоской фигуры	353
§ 2. Объем тела	354
§ 3. Площадь кривой поверхности	356
§ 4. Масса плоской фигуры	361
§ 5. Статические моменты плоской фигуры	362
§ 6. Координаты центра тяжести плоской фигуры	365
§ 7. Момент инерции плоской фигуры	370
 <i>Глава XXI</i>	
Тройные интегралы	373
§ 1. Тройной интеграл	373
§ 2. Геометрический и физический смысл тройного интеграла	374

	<i>Стр.</i>
§ 3. Основные свойства тройного интеграла	374
§ 4. Вычисление тройного интеграла путем сведения к последовательному трехкратному интегрированию	375
§ 5. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах	379
§ 6. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах	382

Глава XXII

Геометрические и механические приложения тройных интегралов	386
--	------------

§ 1. Объем тела	386
§ 2. Масса тела	392
§ 3. Статические моменты и координаты центра тяжести тела	394
§ 4. Момент инерции тела	398

Приложения

Важнейшие формулы элементарной математики	402
Латинский алфавит. Греческий алфавит	411
Предметный указатель	412

ПРЕДИСЛОВИЕ

Часть II курса высшей математики является непосредственным продолжением и дальнейшим развитием материала, изложенного в I части курса.

В отличие от традиционных курсов высшей математики для техникумов в настоящем учебнике впервые подробно излагается интегральное исчисление, включая двойные и тройные интегралы. Рассматриваются числовые, функциональные и тригонометрические ряды. Это вызвано спецификой работы будущих программистов, вынужденных решать различные инженерно-технические задачи, описываемые дифференциальными уравнениями, уравнениями математической физики и интегральными уравнениями, и постановке их на ЭВМ.

Изучение расширенного курса высшей математики позволит овладеть методами современного анализа и применять эти методы при решении современных прикладных задач.

Материал излагается с подробными выводами и иллюстрируется большим количеством примеров. Приведены задачи для самостоятельного решения. Для удобства пользования книгой в конце ее помещен предметный указатель.

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

§ 1. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

Непрерывная на заданном интервале функция $y=f(x)$ имеет *максимум* в точке $x=a$, называемой *точкой максимума*, если в достаточной близости от этой точки всем значениям x (как бóльшим, так и меньшим a) соответствуют значения $f(x)$, меньшие, чем $f(a)$. Иными словами, значение функции в точке максимума $x=a$ больше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к точке максимума.

В случае максимума функции должно выполняться неравенство

$$f(a) > f(x) \quad (9.1)$$

или

$$f(a + \Delta x) < f(a) \quad (9.1')$$

для любых как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по абсолютной величине значений Δx .

Непрерывная на заданном интервале функция $y=f(x)$ имеет *минимум* в точке $x=a$, называемой *точкой минимума*, если в достаточной близости от этой точки всем значениям x соответствуют значения $f(x)$, бóльшие, чем $f(a)$. Иными словами, значение функции в точке минимума $x=a$ меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к точке минимума.

В случае минимума функции должно выполняться неравенство

$$f(a) < f(x) \quad (9.2)$$

или

$$f(a + \Delta x) > f(a) \quad (9.2')$$

для любых как положительных, так и отрицательных Δx , достаточно малых по абсолютной величине.

Точки максимума и минимума функции называют *точками экстремума* (в переводе с латинского «экстремум» означает «крайности»).

Итак, максимум функции $f(x)$ есть значение этой функции в точке максимума, а минимум функции $f(x)$ — значение в точке минимума. Значение функции $f(x)$ в точке, в которой функция имеет экстремум (максимум или минимум) называется *экстремальным*. Максимум или минимум не являются обязательно ее наибольшими или наименьшими значениями. Вне точки $x=a$ функция может принимать бóльшие или меньшие значения, чем в этой точке. Кроме того, функция

может иметь несколько экстремумов. Так, например, функция $y = f(x)$ (рис. 9.1) имеет максимум в точках $x = x_1$, $x = x_3$ и минимум в точках $x = x_2$, $x = x_4$.

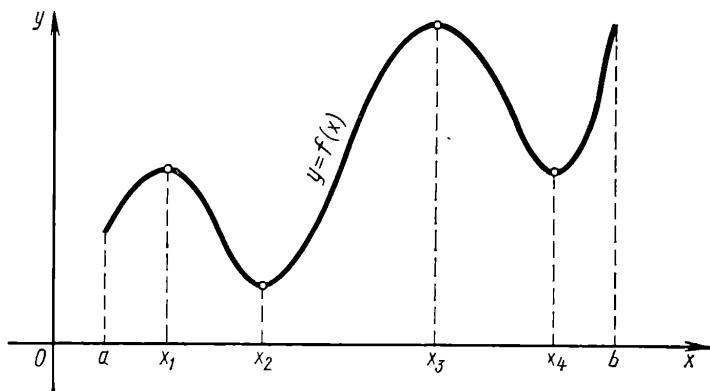


Рис. 9.1

§ 2. ТЕОРЕМЫ ФЕРМА, РОЛЛЯ, ЛАГРАНЖА И КОШИ

Теорема Ферма. Если функция $y = f(x)$ имеет в точке экстремума конечную производную, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$

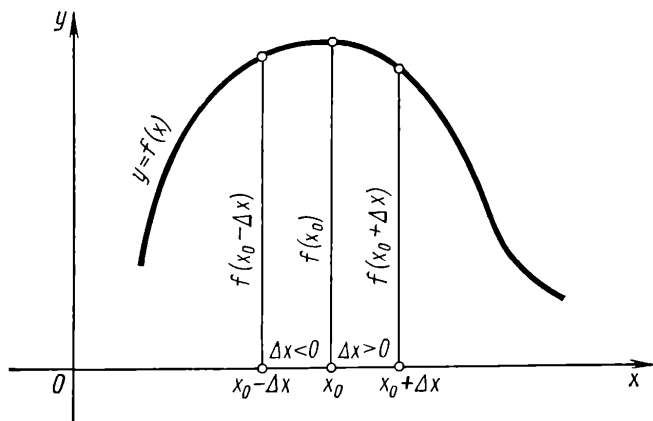


Рис. 9.2

(рис. 9.2) имеет максимум и величина $f'(x_0)$ конечна. Тогда в некоторой окрестности этой точки как справа, так и слева от нее

$$f(x) \leq f(x_0). \quad (9.3)$$

Придадим величине x_0 положительное или отрицательное приращение Δx такое, чтобы точка $x_0 + \Delta x$ не вышла из окрестности рассматриваемой точки. Тогда в силу соотношения (9.3) имеем

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0). \quad (9.4)$$

Вычитая из неравенства (9.4) неравенство (9.3), получим

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x) \leq 0, \quad (9.5)$$

или

$$\Delta y \leq 0 \quad (9.5')$$

независимо от знака приращения аргумента Δx . Если $\Delta x > 0$, то, согласно неравенствам (9.5) и (9.5'), отношение $\Delta y / \Delta x \leq 0$ и, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, находим

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x_0) \leq 0. \quad (9.6)$$

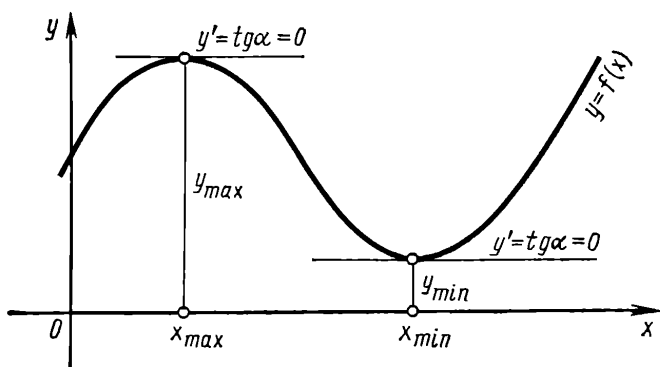


Рис. 9.3

Если $\Delta x < 0$, то $\Delta y / \Delta x \geq 0$ и, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x_0) \geq 0. \quad (9.7)$$

Из соотношений (9.6) и (9.7) следует, что $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Если в точке x_0 функция имеет минимум, то все рассуждения аналогичны. Геометрический смысл теоремы Ферма сводится к тому, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке экстремума, то касательная в соответствующей точке графика функции параллельна оси абсцисс, так как угловой коэффициент касательной равен нулю (рис. 9.3). Возможны также случаи существования бесконечной производной (рис. 9.4) или отсутствия производной (рис. 9.5). Так, функция $y = x^{2/3}$ при $x = 0$ имеет минимум, хотя при этом $y' \rightarrow \infty$; функция $y = |x|$ в точке $x = 0$ также имеет минимум, хотя y' вообще не существует.

Теорема Ролля. Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ имеет конечную производную в каждой внутренней точке этого отрезка. Если при этом

$$f(a) = f(b) = 0 \quad \text{или} \quad f(a) = f(b), \quad (9.8)$$

то между точками a и b найдется, по крайней мере, одна такая точка c ($a \leq c \leq b$), в которой

$$f'(c) = 0. \quad (9.9)$$

Доказательство. Пусть значения функции $f(x)$ на концах отрезка

$$f(a) = f(b) = \eta.$$

В случае, если значения функции $f(x) = \eta$ во всех точках x отрезка $[a, b]$, то функция $f(x)$ постоянна на этом отрезке и в любой его точке производная $f'(x) = 0$. Утверждение теоремы доказано.

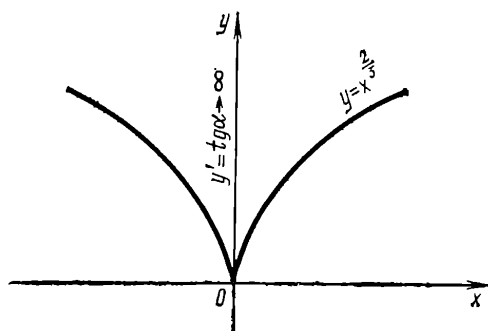


Рис. 9.4

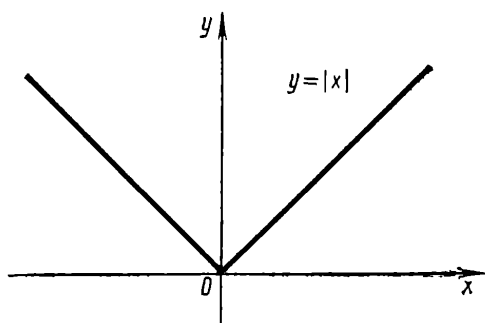


Рис. 9.5

В противном случае отрезок $[a, b]$ содержит точки, в которых значения функции $f(x) > \eta$ или $f(x) < \eta$. Предположим, что существуют такие точки, в которых значения функции $f(x) > \eta$. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и поэтому принимает на этом отрезке некоторое наименьшее и некоторое наибольшее значения. Пусть в точке c данного отрезка функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Очевидно, что тогда $f(c) > \eta$ и точка c отлична от точек a и b , т.е. лежит внутри отрезка $[a, b]$. Следовательно, для всех точек отрезка $[a, b]$, в том числе для всех достаточно близких к точке c точек x справедливо неравенство

$$f(x) \leq f(c),$$

т.е. выполняется условие существования максимума функции. Применяя теорему Ферма, имеем $f'(c) = 0$, что и требовалось доказать. Доказательство для случая существования точек, в которых $f(x) < \eta$, аналогично. С алгебраической точки зрения теорему Ролля можно сформулировать следующим образом: *между каждыми двумя корнями x_1 и x_2 алгебраического уравнения $f(x) = 0$ заключен хотя бы один корень уравнения $f'(x) = 0$* . Геометрический смысл теоремы Ролля заключается в том, что при условиях, наложенных на функцию $f(x)$, на кривой $y = f(x)$ имеется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна оси абсцисс (или угловой коэффициент равен

нулю) (рис. 9.6). Механический смысл теоремы Ролля состоит в том, что в точке $x = c$ мгновенная скорость равна средней скорости.

Теорема Лагранжа. Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой внутренней

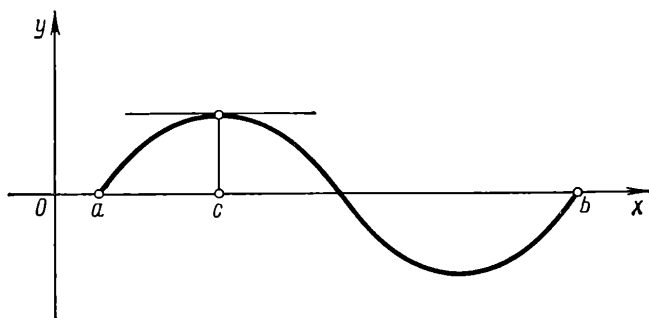


Рис. 9.6

точке этого отрезка. Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется, по крайней мере, одна такая точка c , в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad (9.10)$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (9.10')$$

Если обозначить $h = b - a$, то

$$f(a + h) - f(a) = f'(c)h,$$

или

$$f(a + h) = f(a) + f'(c)h. \quad (9.11)$$

Это равенство называется *формулой Лагранжа*, или *формулой конечных приращений*.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Если вывод теоремы записать в виде

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f'(c)}{1}, \quad (9.12)$$

то, очевидно, что отношение, стоящее в левой части равенства, представляет собой угловой коэффициент хорды AB , которая соединяет концы кривой $y = f(x)$ (рис. 9.7). Величина $f'(c)$ есть угловой коэффициент касательной в некоторой точке кривой. Формула (9.12) выражает равенство угловых коэффициентов, т. е. параллельность хорды и касательной.

Таким образом, при соблюдении условий, налагаемых на функцию $f(x)$, на кривой $y = f(x)$ найдется точка, в которой касательная параллельна хорде AB . Докажем это утверждение. Пусть

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k.$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - (x-a)k.$$

Для выяснения геометрического смысла функции $F(x)$ составим уравнение хорды AB , проходящей через точку $[a; f(a)]$ и имеющей угловой коэффициент $k = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$:

$$Y - f(a) = k(x - a),$$

или

$$Y = f(a) + k(x - a).$$

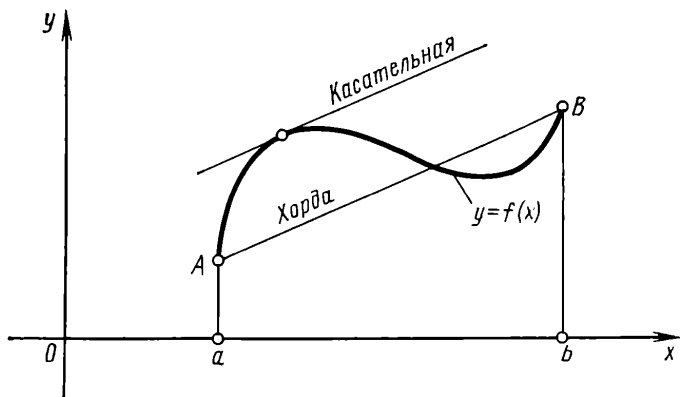


Рис. 9.7

С другой стороны,

$$F(x) = f(x) - [f(a) + k(x-a)] = f(x) - Y,$$

т. е. вспомогательная функция для любого значения x представляет собой разность ординат кривой $y = f(x)$ и хорды $Y = f(a) + k(x-a)$ для точек с одинаковой абсциссой. Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема внутри этого отрезка и обращается в нуль на его концах, так как

$$F(a) = f(a) - f(a) - k(a-a) = 0$$

и

$$F(b) = f(b) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) \right] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0.$$

Следовательно, к вспомогательной функции $F(x)$ применима теорема Ролля, согласно которой внутри отрезка $[a, b]$ существует такая точка c , что

$$F'(c) = 0.$$

Производная вспомогательной функции

$$F'(x) = f'(x) - k,$$

поэтому

$$F'(c) = f'(c) - k = 0,$$

откуда

$$k = f'(c).$$

Подставляя найденное значение k в равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = k,$$

имеем

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

откуда

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

что и требовалось доказать. Заметим, что поскольку $a < c < b$, то

$$c - a < b - a,$$

или

$$c - a = \theta(b - a),$$

где $0 < \theta < 1$. Тогда

$$c = a + \theta(b - a)$$

и формула Лагранжа имеет вид

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'[a + \theta(b - a)].$$

Теорема Лагранжа включает теорему Ролля как частный случай, так как при $f(a) = f(b) = 0$ равенство $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ принимает вид $f'(c)(b - a) = 0$.

Следовательно, так как $b > a$, то возможно лишь равенство $f'(c) = 0$, т. е. справедливо заключение теоремы Ролля.

Механический смысл теоремы Лагранжа состоит в следующем. Пусть $f(t)$ — расстояние точки в момент времени t от начального положения. Тогда $f(b) - f(a)$ есть путь, пройденный точкой с момента $t = a$ до момента $t = b$. Отношение $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ является в этом случае средней скоростью в данном промежутке времени. С механической точки зрения теорема Лагранжа утверждает, что в какой-то промежуточный момент времени мгновенная скорость точки равна средней скорости движения при условии, что в каждый момент точка обладает определенной скоростью.

Теорема Коши. (Теорема об отношении приращений двух функций.)

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы внутри этого отрезка, причем производная $\varphi'(x)$ внутри отрезка не обращается в нуль, то внутри отрезка $[a, b]$ найдется такая точка $x = c$, в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = k.$$

Здесь $\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0$, так как в противном случае $\varphi(b)$ равнялось бы $\varphi(x)$ и, согласно теореме Ролля, производная $\varphi'(x)$ внутри отрезка обратилась бы в нуль, что противоречит условию теоремы Коши. Составим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - k[\varphi(x) - \varphi(a)].$$

Функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка и на его концах:

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) - k[\varphi(a) - \varphi(a)] = 0, \\ F(b) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}[\varphi(b) - \varphi(a)] = \\ &= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0, \end{aligned}$$

т. е. удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Ролля, поэтому на этом отрезке существует такая точка $x=c$, в которой $F'(c) = 0$.

Производная вспомогательной функции

$$F'(x) = f'(x) - k\varphi'(x),$$

поэтому

$$F'(c) = f'(c) - k\varphi'(c) = 0,$$

откуда

$$k = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Подставляя вместо k его значение, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема Коши является обобщением теоремы Лагранжа, которая является ее частным случаем при $\varphi(x) = x$. В самом деле, $\varphi'(x) = 1$, $\varphi(b) = b$, $\varphi(a) = a$ и получаем теорему Лагранжа.

§ 3. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК ЭКСТРЕМУМА

Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция и в точке A кривой $y = f(x)$ при $x = a$ функция имеет максимум (рис. 9.8).

Во всех точках, расположенных левее точки A , касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы α . Поэтому тангенсы этих углов и производная $f'(x)$ в этих точках имеют положительные значения.

В точках, лежащих правее A , касательные образуют с положительным направлением оси Ox тупые углы β , поэтому тангенсы этих углов и производная имеют отрицательные значения. Так как производная функции непрерывна, то при переходе от положительных значений к отрицательным функция при $x = a$ обратится в нуль:

$$f'(a) = 0.$$

Итак, если функция $y = f(x)$ при $x = a$ имеет максимум, то в этой точке $f'(a) = 0$.

Пусть в точке B кривой $y=f(x)$ при $x=a$ рассматриваемая функция имеет минимум (рис. 9.9). В точках, расположенных левее точки B , касательные образуют с положительным направлением оси Ox тупые углы β . Следовательно, тангенсы этих углов и произ-

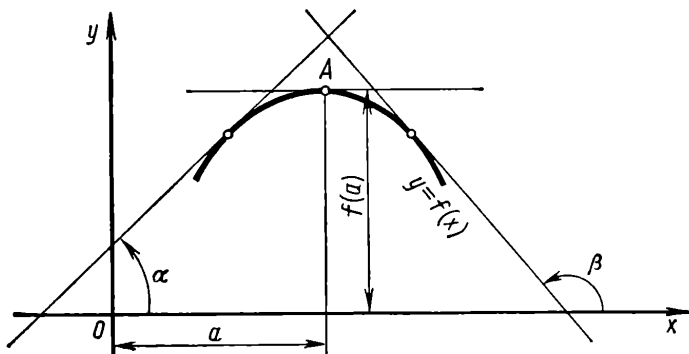


Рис. 9.8

водная $f'(x)$ в этих точках имеют отрицательные значения. В точках, лежащих правее точки B , касательные образуют с положительным направлением оси Ox острые углы α . Поэтому тангенсы этих углов

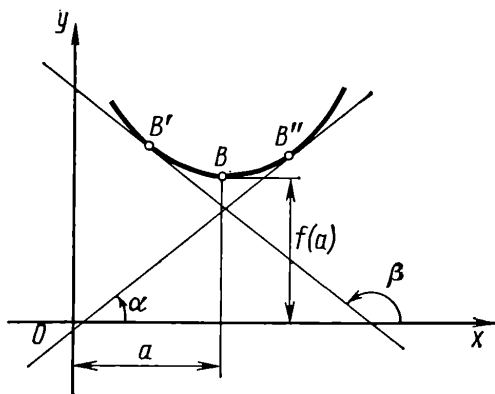


Рис. 9.9

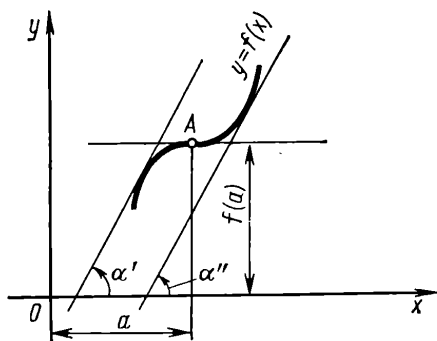


Рис. 9.10

и производная имеют положительные значения. Производная функции непрерывна, поэтому при переходе от отрицательных значений к положительным функция при $x=a$ обратится в нуль и $f'(a)=0$. Итак, если функция $y=f(x)$ при $x=a$ имеет минимум, то $f'(a)=0$. Следовательно, если при всех рассматриваемых значениях аргумента x функция $y=f(x)$ имеет производную, то она может иметь экстремум (максимум или минимум) при тех значениях x , при которых производная обращается в нуль. Обратное утверждение неверно, так как не при любом значении x , при котором производная обращается в нуль, существует экстремум функции. Может случиться, что произ-

водная функции, обращаясь в нуль при $x=a$, не меняет знака при переходе аргумента через $x=a$. В этом случае функция не имеет ни максимума ни минимума (рис. 9.10).

В точках, где производная не существует, функция может иметь максимум или минимум, или не имеет вообще никакого экстремума.

Так, функция $y = \sqrt[3]{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}$ (рис. 9.11) при $x=0$ не имеет про-

изводной (в этой точке про-

изводная $y' = -\frac{\sqrt[3]{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$

обращается в бесконечность),

но в этой точке функция имеет максимум $f(0)=1$ и $f(x) < 1$ при $x \neq 0$. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 9.12) имеет про-

изводную $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, которая при $x=0$ стремится к бесконечности,

т. е. не существует. В этой точке функция не имеет экстремума. Следовательно, функция может иметь экстремум в тех точках, где

производная существует и равна нулю или в точках, где производная не существует.

Итак, необходимое условие экстремума формулируется так: если функция $y=f(x)$ имеет экстремум в точке $x=a$, то ее производная в этой точке равна нулю или бесконечности, или вовсе не существует. Значения аргумента x , при которых производная функции обращается в нуль или в бесконечность, а также те, в кото-

рых производная не существует, называются *критическими точками*. Исследовать остальные точки на экстремум нет необходимости.

Определив критические точки, в которых функция может достигать экстремума, необходимо каждую из этих точек исследовать в отдельности, пользуясь достаточными условиями существования экстремума, поскольку производная функция может быть равной нулю, бесконечности или не существовать не только в тех точках, в которых функция имеет экстремум.

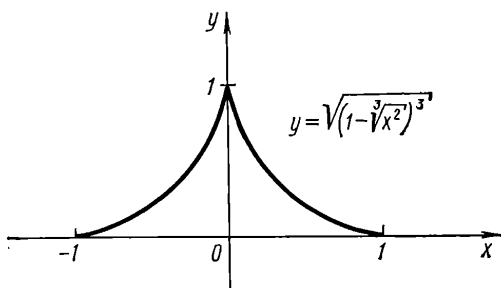


Рис. 9.11

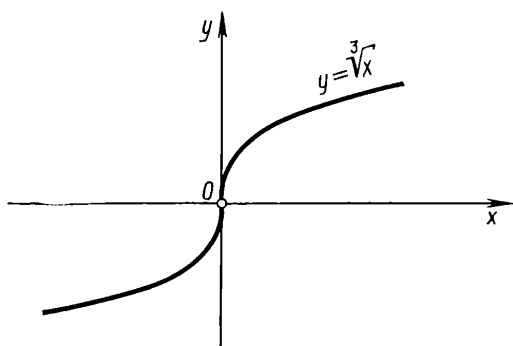


Рис. 9.12

Теорема 1. (Первый достаточный признак существования экстремума.) Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в рассматриваемом интервале, содержащем критическую точку $x_{кр}$ и дифференцируема во всех его точках, кроме, быть может, самой точки $x_{кр}$. Если при переходе слева направо через критическую точку $x=x_{кр}$ производная y' меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция $y=f(x)$ имеет максимум. Если при таком переходе производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция $y=f(x)$ имеет минимум. Если же при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знак, то экстремума нет. Следовательно, достаточным признаком максимума является условие

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &> 0 \quad \text{при } x < x_{кр}, \\ y' = f'(x) &< 0 \quad \text{при } x > x_{кр}, \end{aligned}$$

а достаточным признаком минимума — условие

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &< 0 \quad \text{при } x < x_{кр}, \\ y' = f'(x) &> 0 \quad \text{при } x > x_{кр}. \end{aligned}$$

Доказательство. Предположим, что производная меняет знак с плюса на минус, т. е.

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &> 0 \quad \text{при } x < x_{кр}, \\ y' = f'(x) &< 0 \quad \text{при } x > x_{кр}. \end{aligned}$$

Составим разность $f(x) - f(x_{кр})$ и применим к полученному выражению теорему Лагранжа. Тогда

$$f(x) - f(x_{кр}) = f'(c)(x - x_{кр}),$$

где $x < c < x_{кр}$. Пусть $x < x_{кр}$. В этом случае

$$c < x_{кр}, \quad f'(c) > 0 \quad \text{и} \quad f'(c)(x - x_{кр}) < 0.$$

Следовательно,

$$f(x) - f(x_{кр}) < 0$$

или

$$f(x) < f(x_{кр}). \quad (9.13)$$

Пусть $x > x_{кр}$. В этом случае

$$c > x_{кр}, \quad f'(c) < 0 \quad \text{и} \quad f'(c)(x - x_{кр}) < 0.$$

Следовательно,

$$f(x) - f(x_{кр}) < 0$$

или

$$f(x) < f(x_{кр}). \quad (9.14)$$

Неравенства (9.13) и (9.14) показывают, что для всех значений x (достаточно близких к критическому значению $x_{кр}$), значения функции меньше значения функции в критической точке. Таким образом, в точке $x_{кр}$ функция $y=f(x)$ имеет максимум, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается утверждение теоремы о достаточном условии минимума.

Первое правило исследования дифференцируемой функции $y=f(x)$ на экстремум (с помощью первой производной):

- 1) находится первая производная $y' = f'(x)$;
- 2) найденная производная приравнивается нулю и находятся действительные корни уравнения $f'(x) = 0$;
- 3) определяются те значения x , при которых производная $y' = f'(x)$ равна ∞ или не существует;
- 4) для каждой из общего количества i критических точек $x_i = a_i$, расположенных в порядке возрастания абсцисс, исследуется знак производной $y' = f'(x)$ слева и справа от критической точки.

Если $f'(x)$ переходит от положительных значений к отрицательным, то имеет место максимум, если от отрицательных значений к положительным, то минимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак, то нет ни максимума ни минимума: при $f'(x) > 0$ функция $f(x)$ в точке a возрастает, при $f'(x) < 0$ — убывает (табл. 1);

- 5) вычисляются экстремальные значения функции $y = f(x)$ в точках, где функция достигает экстремума.

Т а б л и ц а 1

Знак производной		Вид графика вблизи точки a	Характер изменения функции
При $x < a$	При $x > a$		
+	—		максимум
—	+		минимум
+	+		возрастание
—	—		убывание

Пример 1. Найти с помощью первой производной экстремум функции

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 24.$$

Решение. Производная функции

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36.$$

Приравнивая нулю найденную производную, имеем

$$6x^2 - 30x + 36 = 0,$$

откуда после сокращения на общий множитель получим

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Корни этого уравнения $x_1=2$, $x_2=3$. Разбиваем критическими точками весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ на части (располагая критические точки в порядке их возрастания): $(-\infty; 2)$; $(2; 3)$; $(3; +\infty)$. Определяем знаки производной до и после критического значения, устанавливая знак производной для конкретных значений x из каждого промежутка:

при $x=0$ производная $f'(x)=6,6 > 0$, т. е. в первом промежутке функция возрастает;

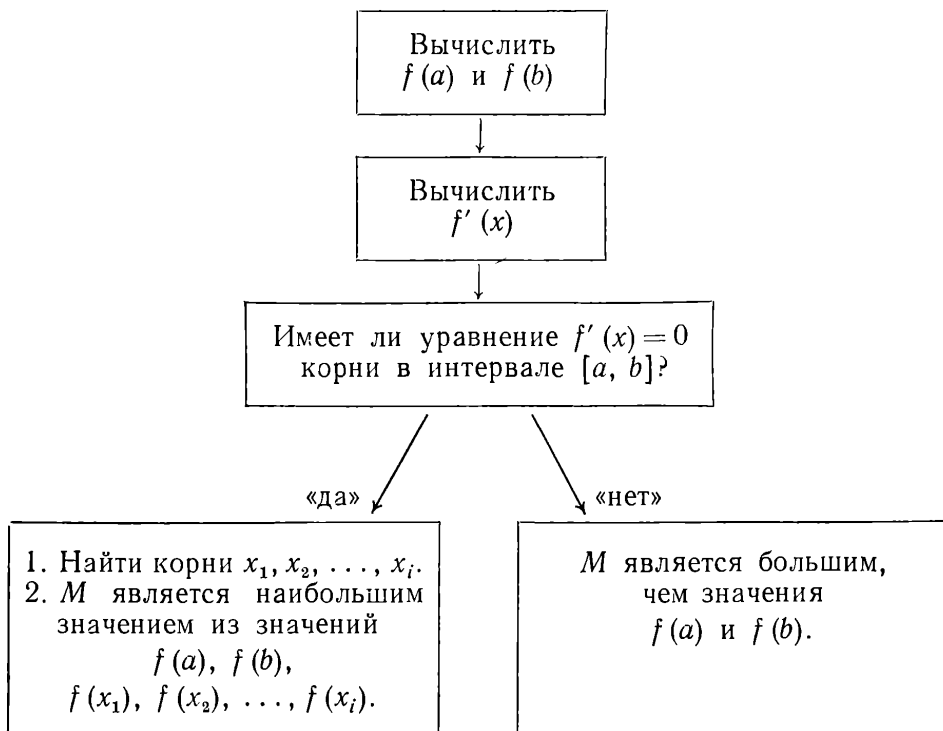
при $x=2,5$ производная $f'(x) < 0$, т. е. во втором промежутке функция убывает;

при $x=4$ производная $f'(x) > 0$, т. е. в третьем промежутке функция возрастает.

Итак, при $x=2$ функция имеет максимум, а при $x=3$ —минимум.

Первый достаточный признак существования экстремума лежит в основании правила определения экстремума (например, максимума) дифференцируемой функции на ЭВМ.

Блок-схема определения максимума функции $y=f(x)$ для всех x в интервале $[a, b]$



Теорема 2. (Второй достаточный признак существования экстремума.) Пусть в точке $x=x_{кр}$ производная $f'(x)$ обращается в нуль, т. е. $f'(x_{кр})=0$.

Если при этом вторая производная $f''(x_{кр})$ отрицательна, т. е. $f''(x_{кр}) < 0$, то функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_{кр}$ мак-

симум; если вторая производная $f''(x_{кр})$ положительна, т. е. $f''(x_{кр}) > 0$, то функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_{кр}$ минимум.

Доказательство. Пусть $f'(x_{кр}) = 0$ и $f''(x_{кр}) < 0$. По условию вторая производная $f''(x)$ является непрерывной в некоторой окрестности точки $x = x_{кр}$ и поэтому найдется такой малый отрезок вокруг критической точки $x = x_{кр}$, во всех точках которого производная $f''(x)$ отрицательна. Поскольку $f''(x)$ есть производная от первой производной, т. е. $f''(x) = (f'(x))'$, то из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что производная $f'(x)$ убывает на отрезке, содержащем критическую точку $x = x_{кр}$. С другой стороны $f'(x_{кр}) = 0$ и поэтому на этом отрезке при $x < x_{кр}$ имеем $f'(x) > 0$, а при $x > x_{кр}$ имеем $f'(x) < 0$, т. е. производная $f'(x)$ при переходе через значение аргумента $x = x_{кр}$ меняет знак с плюса на минус. Следовательно, в точке $x = x_{кр}$ функция $y = f(x)$ имеет максимум.

Аналогично доказывается вторая часть теоремы. Если $f''(x_{кр}) > 0$, то производная $f''(x) > 0$ во всех точках отрезка, окружающего критическую точку $x = x_{кр}$. Тогда на этом отрезке $f''(x) = (f'(x))' > 0$ и функция $f'(x)$ возрастает. Поскольку $f'(x_{кр}) = 0$, то при переходе через значение аргумента $x = x_{кр}$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, т. е. функция $y = f(x)$ имеет в критической точке $x = x_{кр}$ минимум.

Если в критической точке $x_{кр}$ значение второй производной равно нулю, т. е. $f''(x_{кр}) = 0$, то исследование экстремума становится неопределенным, так как в этой точке может быть максимум, минимум или не быть ни максимума, ни минимума. В этом случае необходимо применять способ исследования функции на экстремум с помощью первой производной.

Второе правило исследования дифференцируемой функции $y = f(x)$ на экстремум (с помощью второй производной):

- 1) находится первая производная $y' = f'(x)$;
- 2) решается уравнение $f'(x) = 0$ и находятся корни этого уравнения x_i ;
- 3) находится вторая производная $y'' = f''(x)$ (предполагается, что функция $y = f(x)$ в окрестности точек $x = x_i$ имеет непрерывную вторую производную);

4) исследуется знак второй производной $f''(x)$ в каждой из точек, найденных в п. 2. Если в рассматриваемой точке $f''(x_i) > 0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x_i) < 0$, то в рассматриваемой точке будет максимум. Если же в рассматриваемой точке $f''(x_i) = 0$, то исследование экстремума проводится с помощью первого правила. Это обстоятельство является недостатком второго правила исследования функции на экстремум, которое само по себе значительно проще первого.

Пример 2. Найти с помощью второй производной экстремум функции

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2.$$

Решение. Находим первую производную $y' = x^3 - 2x^2 - 3x$.

Решим уравнение

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0.$$

Разлагая левую часть уравнения на множители, имеем

$$x(x^2 - 2x - 3) = 0.$$

Корни этого уравнения (в порядке возрастания абсцисс) $x_1 = -1$; $x_2 = 0$ и $x_3 = 3$ являются критическими точками. Производная конечна при любом x и поэтому других критических точек нет.

Находим вторую производную

$$y'' = 3x^2 - 4x - 3.$$

Определяем знак второй производной в каждой из критических точек:

$f''(-1) = 4 > 0$, следовательно, функция в точке $x = -1$ имеет минимум;

$f''(0) = -3 < 0$, следовательно, функция в точке $x = 0$ имеет максимум;

$f''(3) = 12 > 0$, следовательно, функция в точке $x = 3$ имеет минимум.

Экстремальные значения функции: $f(-1) = 17/12$; $f(0) = 2$; $f(3) = -37/4$.

§ 5. ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке всегда найдутся точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются в критических точках или на концах данного отрезка. Наибольшее значение функции достигается либо во внутренней точке максимума, либо на концах отрезка; наименьшее значение — либо во внутренней точке минимума, либо на концах отрезка.

Правило определения наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) находятся критические точки функции;

2) вычисляются экстремальные значения функции и на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;

3) наибольшее из вычисленных таким образом значений является наибольшим значением функции, а наименьшее — наименьшим значением функции на отрезке $[a, b]$.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = x^4 + 8x^3 + 16x^2$$

на отрезке $[-7/2; 3/2]$.

Решение. Находим производную

$$y' = 4x^3 + 24x^2 + 32x$$

и приравниваем ее нулю:

$$4x^3 + 24x^2 + 32x = 0.$$

Сокращая на общий множитель и вынося x за скобку, имеем

$$x(x^2 + 6x + 8) = 0.$$

Найдем корни этого уравнения, которые являются критическими точками: $x_1 = -4$; $x_2 = -2$; $x_3 = 0$. На заданном отрезке находятся две критические точки $x_2 = -2$ и $x_3 = 0$.

Экстремальные значения функции в этих точках $f(-2) = 16$, $f(0) = 0$. Значения функции на концах интервала:

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}\right)^4 + 8\left(-\frac{7}{2}\right)^3 + 16\left(-\frac{7}{2}\right)^2 = 3,0625;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^4 + 8\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 16\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 68,0625.$$

Сравнивая значения функции на концах отрезка с ее экстремальными значениями, приходим к выводу, что наибольшее значение, равное 68,0625, функция имеет на правом конце отрезка в точке $x = 3/2$, а наименьшее, равное нулю, в точке $x = 0$ (это значение совпадает с минимумом функции на данном отрезке).

С помощью экстремума функций решаются многие прикладные задачи геометрии, механики и т. д., в которых требуется определить наибольшее или наименьшее значение функции, причем эта функция не дается в готовом виде, а составляется в соответствии с условиями конкретной задачи.

Задача 1. Требуется изготовить жестяную банку емкостью 2000 см^3 , закрытую сверху и снизу. Каковы должны быть размеры банки, чтобы на ее изготовление потребовалось наименьшее количество материала?

Решение. Обозначим через R (см) радиус основания, а через H (см) — высоту банки. Так как объем банки $V = 2000 \text{ см}^3$, то между величинами R и H существует зависимость

$$\pi R^2 H = 2000, \quad (1)$$

которая позволяет выразить R через H , и наоборот. Поверхность банки

$$S = 2\pi R H + 2\pi R^2 \quad (2)$$

выражается функцией двух переменных H и R . Чтобы ответить на вопрос задачи, требуется найти минимум функции S . Представим S как функцию одной переменной H или R (какой именно — принципиально безразлично). Очевидно, что проще всего взять за независимую переменную R . Тогда из равенства (1) имеем

$$H = \frac{2000}{\pi R^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (2), получим

$$S = \frac{4000}{R} + 2\pi R^2.$$

Найдем производную S' и приравняем ее нулю:

$$-\frac{4000}{R^2} + 4\pi R = 0,$$

откуда

$$R^3 = \frac{1000}{\pi} \text{ и } R = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} \text{ (см).}$$

Из условия задачи видно, что при $R = \sqrt[3]{\frac{1000}{\pi}} = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ функция S действительно имеет минимум. В самом деле, при очень малых

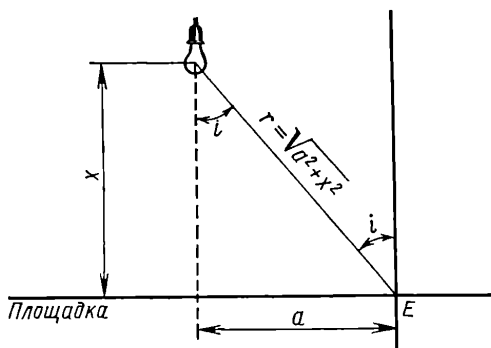


Рис. 9.13

радиусах дна поверхность банки заданного объема велика за счет боковой поверхности (слагаемое $4000/R$ велико); при очень больших радиусах дна поверхность банки также велика из-за чрезмерно больших площадей крышки и дна (слагаемое $2\pi R^2$ велико). Таким образом, должен существовать некоторый наивыгоднейший радиус дна банки (не слишком большой и не слишком маленький).

Соответствующая высота банки находится из равенства (1):

$$H = \frac{2000}{\pi \sqrt[3]{\left(\frac{1000}{\pi}\right)^2}} = \frac{2000 \sqrt[3]{\pi^2}}{\pi 100} = \frac{20}{\sqrt[3]{\pi}} \text{ (см).}$$

Очевидно, что высота банки должна быть вдвое больше радиуса (т. е. равняться диаметру) ее дна. Нетрудно убедиться, что такое соотношение остается наивыгоднейшим для банки любого объема.

Задача 2. Найти, на какой высоте x над площадкой следует поместить лампу, чтобы освещенность площадки была максимальной. Считать, что площадка не перпендикулярна лучам (рис. 9.13). Известно, что освещенность площадки обратно пропорциональна квадрату расстояния ее от источника света и прямо пропорциональна косинусу угла падения световых лучей:

$$I = \frac{k}{r^2} \cos i.$$

Решение. Из рис. 9.13 находим

$$r^2 = a^2 + x^2; \quad \cos i = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Следовательно, освещенность

$$I = \frac{k}{a^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = kx(a^2 + x^2)^{-3/2}.$$

Дифференцируем полученную функцию по x и производную приравняем нулю:

$$I' = k(a^2 + x^2)^{-3/2} [1 - 3x^2(a^2 + x^2)^{-1}] = 0.$$

Так как k и $a^2 + x^2$ не равны нулю, то множитель в квадратных скобках должен быть равен нулю, т. е.

$$1 = 3x^2(a^2 + x^2)^{-1}.$$

Отсюда искомая высота

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{2}} = 0,707a.$$

Задача 3. Газ, содержащий окись азота, смешивают с воздухом. Определить, при каком содержании кислорода (в %) в полученной смеси скорость окисления азота будет максимальна и какой объем воздуха нужно добавить, чтобы обеспечить это количество кислорода в смеси.

Решение. Пусть:

x — число объемов воздуха, добавляемого к одному объему исходного газа;

a — объемная доля окиси азота в исходном газе;

b — объемная доля прочих (инертных) компонентов в исходном газе;

c — объем кислорода, вводимого с воздухом на один объем исходного газа;

n — объем азота, вводимого в смесь с воздухом. Тогда $a + b + c + n = 1 + x$, причем $a + b = 1$ и $c + n = x$. Так как в воздухе находится 20,8% кислорода и 79,2% азота, то

$$n = 79,2c/20,8 = 3,81c.$$

Поэтому

$$x = 4,81c \text{ и } c = x/4,81.$$

Концентрации окиси азота и кислорода в смеси, выраженные в объемных долях, таковы:

$$\frac{1+x}{a} \text{ — концентрация окиси азота;}$$

$$\frac{c}{1+x} = \frac{x}{4,81(1+x)} \text{ — концентрация кислорода.}$$

В условиях практической необратимости скорость реакции $2\text{NO} + \text{O}_2 = 2\text{NO}_2$ выражается следующим уравнением:

$$v = kx^2y,$$

где x — концентрация NO в любой момент времени; y — концентрация O_2 ; k — константа скорости реакции, зависящая только от температуры.

Подставляя эти величины в уравнение скорости окисления окиси азота $v = k[\text{NO}]^2[\text{O}_2]$, получим

$$v = k \frac{a^2}{(1+x)^2} \frac{x}{4,81(1+x)},$$

или

$$v = k \frac{a^2}{4,81} \frac{x}{(1+x)^3}.$$

Для определения при заданном a значения x , при котором скорость окисления v максимальна, находим первую производную от v по x и приравниваем ее нулю:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{ka^2}{4,81} \frac{1-2x}{(1+x)^4} = 0.$$

Производная обращается в нуль при $x=0,5$. Таким образом, при $x=0,5$, т. е. при добавлении к одному объему исходного газа 0,5 объема воздуха, состав газовой смеси будет удовлетворять условию максимальной скорости окисления окиси азота.

Соответствующая концентрация кислорода в смеси должна быть равна

$$\frac{x}{4,81(1+x)} = \frac{0,5}{4,81(1+0,5)} = 0,0693 = 6,93\%.$$

Упражнения

Найти экстремумы следующих функций:

1. $y = x^2 - 2x + 3$.

Отв. $y_{\min} = 2$ при $x = 1$.

2. $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$.

Отв. $y_{\max} = 10$ при $x = 1$; $y_{\min} = -22$ при $x = 5$.

3. $y = x^4 - 8x^2 + 2$.

Отв. $y_{\max} = 2$ при $x = 0$; $y_{\min} = -14$ при $x = \pm 2$.

4. $y = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 20$.

Отв. $y_{\max} = 97/4$ при $x = 1/2$; $y_{\min} = -7$ при $x = 3$.

5. $y = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$.

Отв. $y_{\max} = 2$ при $x = 1$.

6. $y = 3 - 2\sqrt[3]{1+x}$.

Отв. Экстремума нет.

7. $y = \frac{(x-2)(3-x)}{x^2}$.

Отв. $y_{\max} = 1/24$ при $x = 12/5$.

8. $y = \sin 3x - 3 \sin x$.

Отв. $y_{\min} = -4$ при $x = \pi/2$; $y_{\max} = 4$ при $x = 3\pi/2$.

Найти наибольшие и наименьшие значения следующих функций на заданных отрезках:

9. $y = 6x^2 - 3x^4 - 1$ на отрезке $[-2, 2]$.

Отв. Наибольшее значение $y = 2$ при $x = \pm 1$; наименьшее значение $y = -25$ при $x = \pm 2$.

10. $y = \frac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0, 4]$.

Отв. Наибольшее значение $y = 0,6$ при $x = 4$; наименьшее значение $y = -1$ при $x = 0$.

11. $y = \sin 2x - x$ на отрезке $[-\pi/2, \pi/2]$.

Отв. Наибольшее значение $y = \pi/2$ при $x = -\pi/2$; наименьшее значение $y = -\pi/2$ при $x = \pi/2$.

12. Из квадратного листа жести со стороной 60 см необходимо сделать открытую коробку возможно большего объема, вырезая по углам равные квадраты,

удаляя их и загибая жёст для образования боков коробки. Какова должна быть длина стороны вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объём?

Отв. 10 см.

13. Найти высоту прямого кругового цилиндра наибольшего объёма, который может быть вписан в шар радиуса R .

Отв. $h = 2R/\sqrt{3}$.

14. Требуется изготовить открытый сверху цилиндрический сосуд объёмом V . Каковы должны быть радиус и высота, чтобы поверхность сосуда была наименьшей?

Отв. $R = H = \sqrt[3]{V/\pi}$.

15. Корабль стоит в 9 км от берега. С корабля надо послать матроса в город, расположенный в 15 км от корабля, считая по берегу. Матрос пешком проходит 5 км/ч, скорость шлюпки 4 км/ч. В какой точке берега матрос должен остановиться, чтобы прийти в город за наименьшее время?

Отв. В 3 км от корабля.

§ 6. ТЕОРЕМЫ О ВОЗРАСТАНИИ И УБЫВАНИИ ФУНКЦИИ В ИНТЕРВАЛЕ

Для изучения свойств функций имеют большое теоретическое и практическое значение следующие теоремы.

Теорема 1. (Признак постоянства функции.) Если во всех точках некоторого промежутка производная $f'(x) = 0$, то функция $f(x)$ в этом промежутке сохраняет постоянное значение.

Доказательство. Возьмем в заданном промежутке произвольную фиксированную точку x_0 . Для любой другой точки c из этого промежутка в силу теоремы Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где $x_0 \leq c \leq x$. Следовательно, эта точка также лежит в рассматриваемом промежутке. Но по условию $f'(c) = 0$ и тогда

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

откуда $f(x) = f(x_0) = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке и имеет конечную производную $f'(x) \geq 0$ во всех внутренних точках этого промежутка, то функция $f(x)$ не убывает в этом промежутке.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — произвольные точки промежутка, причем $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 \leq c \leq x_2$ и поэтому точка c также лежит внутри промежутка.

Тогда по условию теоремы $f'(c) \geq 0$. Поскольку при этом $x_2 - x_1 > 0$, то

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0$$

или

$$f(x_1) \leq f(x_2),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. Если функция $f(x)$ непрерывна в некотором промежутке и имеет конечную производную $f'(x) \leq 0$ во всех внутренних

точках промежутка, то функция $f(x)$ не возрастает в этом промежутке.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.

Признаки строгого возрастания и убывания функции можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Если в условиях теорем 2 или 3 нет точек, в которых $f'(x) = 0$, или их конечное множество, или их бесконечное множество, но они не заполняют сплошь никакого частичного промежутка, то функция $f(x)$ строго возрастает или соответственно строго убывает в заданном промежутке.

Доказательство. По теореме 2 или 3 функция $f(x)$ не убывает или, соответственно, не возрастает. Если при этом строгого возрастания (или строгого убывания) нет, то функция $f(x)$ имеет промежутки постоянства, в которых $f'(x) = 0$, что противоречит условиям теоремы.

Теорема 5. Пусть $y = f(x)$ — дифференцируемая функция в интервале (x_1, x_2) . Если в каждой точке x данного интервала $f'(x) > 0$, то функция возрастает, если же в каждой точке x этого интервала $f'(x) < 0$, то функция убывает в этом интервале.

Доказательство. Пусть в интервале (x_1, x_2) производная $f'(x) > 0$. Возьмем в этом интервале любые две точки a и b . Тогда по формуле Лагранжа имеем

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

где $a < c < b$. По условию теоремы $f'(c) > 0$, поэтому $b - a > 0$ и $f(b) - f(a) > 0$, т. е. в интервале (x_1, x_2) заданная функция возрастает.

Если же $f'(c) < 0$, то при $b - a > 0$ и $f(b) - f(a) < 0$, а это значит, что в интервале (x_1, x_2) данная функция убывает.

Интервалы, на которых функция возрастает (или убывает), называются *интервалами монотонности*.

У дифференцируемой функции $y = f(x)$ в интервале возрастания $f'(x) \geq 0$, а в интервале убывания $f'(x) \leq 0$. Если производная $f'(x)$ непрерывна, то интервалы монотонности могут разделяться лишь точками, в которых $f'(x) = 0$, так как изменение знака непрерывной функции возможно лишь при переходе ее через нуль.

Точка, в которой производная $f'(x) = 0$, называется *точкой стационарности функции* $y = f(x)$, поскольку в достаточно малой окрестности этой точки функция почти не изменяется.

Рассмотрим функции, дифференцируемые всюду, за исключением конечного числа точек в областях их определения, имеющие конечное число точек стационарности. Можно доказать, что ее интервалы монотонности разделяются точками стационарности функции $y = f(x)$ или точками, в которых производная функции не существует. Однако не каждая такая точка будет разделять интервалы монотонности.

На рис. 9.14 в точках x_1, x_3, x_4, x_6, x_9 производная равна нулю а в точках x_2, x_5, x_7, x_8 и x_{10} производная не существует. Точки

$x_2, x_3, x_4, x_7, x_9, x_{10}$ разделяют интервалы монотонности функции, а точки x_1, x_5, x_6, x_8 — не разделяют.

Итак, для исследования функции на возрастание и убывание необходимо:

1) найти те точки из области определения функции, в которых производная равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими точками функции $y=f(x)$ и разбивают область определения этой функции на интервалы, в которых знак производной $f'(x)$ постоянен;

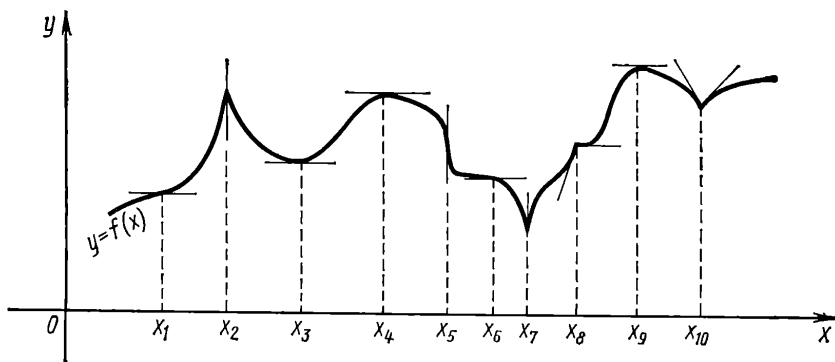


Рис. 9.14

2) исследовать знак производной в каждом из таких интервалов. Если в интервале $f'(x) > 0$, то это интервал возрастания, если $f'(x) < 0$ — интервал убывания.

Пример. Найти интервалы монотонности функции $y = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Заданная функция определена всюду, кроме точки $x=0$, в которой имеет бесконечный разрыв, т. е. область определения функции $-\infty < x < 0$ и $0 < x < +\infty$. Найдем производную функции

$$y' = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

Приравнивая производную нулю, имеем

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \text{ или } x = \pm 1.$$

Таким образом, точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ разбивают область определения функции на следующие интервалы:

возрастания при $-\infty < x < -1$;

убывания при $-1 < x < 1$;

возрастания при $1 < x < +\infty$.

Эта функция нечетная, так как

$$f(-x) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x),$$

поэтому достаточно исследовать знак производной только в интервалах $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

В интервале $0 < x < 1$ производная $f'(x) < 0$, следовательно, функция убывает, а в интервале $1 < x < +\infty$ производная $f'(x) > 0$, следовательно, функция возрастает.

Итак, в интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$ функция возрастает, а в интервалах $(-1, 0)$ и $(0, 1)$ — убывает. Точка 0 исключается, так как в ней функция не определена.

§ 7. ВЫПУКЛОСТЬ И ВОГНУТОСТЬ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Рассмотрим кривую $y = f(x)$, которая представляет собой график однозначно дифференцируемой функции $f(x)$. Кривая $y = f(x)$ в промежутке (a, b) обращена выпуклостью вверх, если все точки

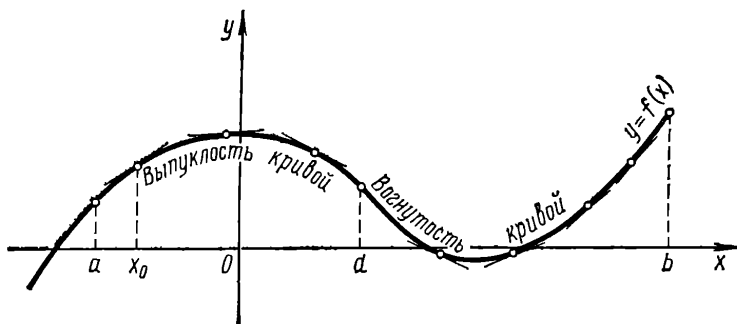


Рис. 9.15

этой кривой расположены ниже любой ее касательной на этом промежутке. Кривая $y = f(x)$ в промежутке (a, b) обращена выпуклостью вниз, если все точки этой кривой расположены выше любой ее касательной на этом промежутке. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой кривой*, а обращенная выпуклостью вниз — *вогнутой кривой* (рис. 9.15). Направления выпуклости и вогнутости кривой характеризуют ее форму в различных промежутках.

Теорема. Если во всех точках промежутка (a, b) вторая производная функции $f(x)$ отрицательна, т. е. $f''(x) < 0$, то кривая $y = f(x)$ в этом промежутке выпукла. Если вторая производная функции $f(x)$ положительна, т. е. $f''(x) > 0$, то кривая $y = f(x)$ в этом промежутке вогнута.

Доказательство. Возьмем в промежутке (a, b) произвольную точку $x = x_0$ и проведем касательную к кривой в точке с абсциссой $x = x_0$. Первая часть теоремы будет доказана, если установить, что все точки кривой в рассматриваемом промежутке лежат ниже касательной. Другими словами, ордината произвольной точки кривой

вой $y = f(x)$ должна быть меньше ординаты касательной при одном и том же значении x .

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ будет

$$y_k - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

или

$$y_k = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Разность ординат кривой и касательной при одинаковом значении аргумента x равна

$$y - y_k = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

На основании теоремы Лагранжа имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0),$$

где $x_0 < \xi < x$. Поэтому

$$y - y_k = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = [f'(\xi) - f'(x_0)](x - x_0).$$

Повторно применяя теорему Лагранжа к выражению, находящемуся в квадратных скобках, получим

$$y - y_k = f''(\xi_1)(\xi - x_0)(x - x_0),$$

где $x_0 < \xi_1 < \xi$.

Пусть $x > x_0$. В этом случае $x_0 < \xi < x$. Так как $x - x_0 > 0$, $\xi - x_0 > 0$ и по условию $f''(\xi_1) < 0$, то разность

$$y - y_k < 0.$$

Пусть $x < x_0$. В этом случае $x < \xi < \xi_1 < x_0$. Поскольку $x - x_0 < 0$, $\xi - x_0 < 0$ и по условию $f''(\xi_1) < 0$, разность $y - y_k < 0$, т. е. любая точка кривой $y = f(x)$ лежит ниже касательной к кривой, а это значит, что кривая выпукла. Вторая часть теоремы доказывается аналогично.

§ 8. ТОЧКИ ПЕРЕГИБА. ОТЫСКИВАНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА И ИНТЕРВАЛОВ ВЫПУКЛОСТИ И ВОГНУТОСТИ ФУНКЦИИ

Точка непрерывной кривой, отделяющая ее выпуклую часть от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Примеры точек перегиба приведены на рис. 9.16, 9.17, 9.18 и 9.19. В точке перегиба касательная пересекает кривую. По одну сторону от точки перегиба кривая расположена под касательной, а по другую сторону — над касательной.

Теорема. (Достаточный признак существования точки перегиба.) Точка кривой $y = f(x)$ с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба, если вторая производная $f''(a) = 0$ или не существует и при переходе через значение аргумента $x = a$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

Доказательство. Пусть вторая производная $f''(x) < 0$ при $x < a$ и $f''(x) > 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вверх, а при $x > a$ — выпуклостью вниз. Таким обра-

зом, точка P кривой $y=f(x)$ с абсциссой $x=a$ является точкой перегиба (рис. 9.18).

Пусть теперь вторая производная $f''(x) > 0$ при $x < a$ и $f''(x) < 0$ при $x > a$. Тогда при $x < a$ кривая обращена выпуклостью вниз,

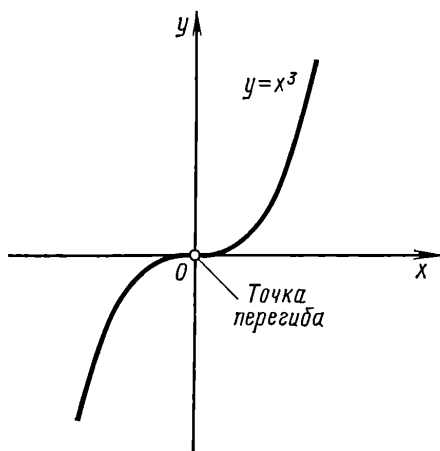


Рис. 9.16

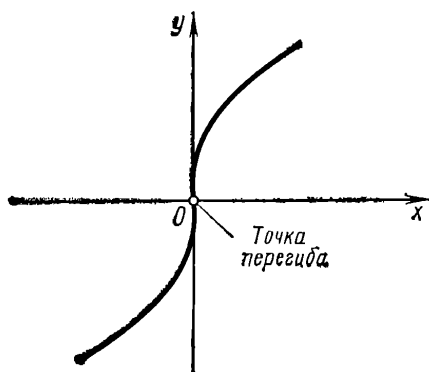


Рис. 9.17

а при $x > a$ — выпуклостью вверх. Итак, точка P кривой $y=f(x)$ с абсциссой $x=a$ является точкой перегиба (рис. 9.19). Интервалы выпуклости кривой $y=f(x)$ определяются из неравенства $f''(x) < 0$, а интервалы вогнутости — из неравенства $f''(x) > 0$.

Пример. Найти точку перегиба и участки выпуклости и вогнутости кривой $y = x^3 - 12x^2 + x - 1$.

Решение. Область существования данной функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$. Найдем первую и вторую производные:

$$y' = 3x^2 - 24x + 1; \quad y'' = 6x - 24.$$

При любом x вторая производная конечна и существует. Определим точки, в которых $y'' = 0$:

$$6x - 24 = 0,$$

откуда $x = 4$. Эта точка разбивает область существования функции на два участка:

при $x < 4$ $y'' < 0$, следовательно, кривая выпукла;

при $x > 4$ $y'' > 0$, следовательно, кривая вогнута.

Итак, точка, абсцисса которой $x = 4$, разделяет участок выпуклости и участок вогнутости кривой, следовательно, она является точкой перегиба. Интервал выпуклости $(-\infty, 4)$; интервал вогнутости $(4, +\infty)$.

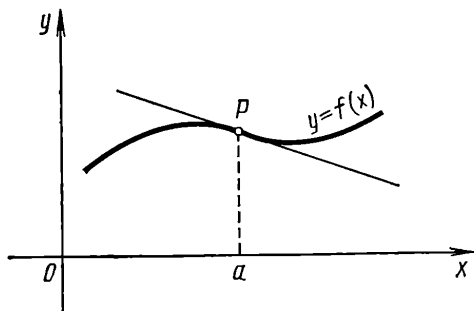


Рис. 9.18

Точка перегиба имеет координаты $P(4; -125)$, так как в точке перегиба значение функции

$$f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 4 - 1 = -125.$$

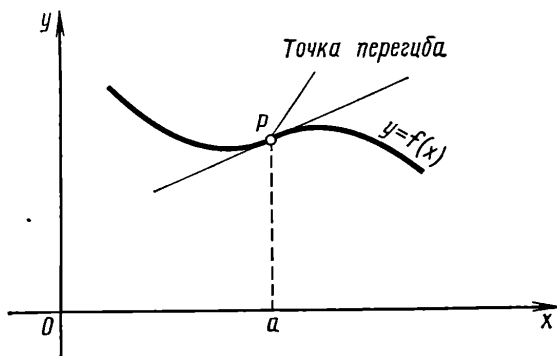


Рис. 9.19

Упражнения

Найти точки перегиба и интервалы выпуклости и вогнутости следующих кривых:

1. $y = x^5$.

Отв. Точка перегиба при $x=0$; при $x < 0$ кривая выпукла, при $x > 0$ кривая вогнута.

2. $y = \sqrt[3]{x-1}$.

Отв. Точка перегиба при $x=1$; при $x < 1$ кривая вогнута, при $x > 1$ кривая выпукла.

3. $y = -x^3 + 15x^2 - x - 250$.

Отв. Точка перегиба при $x=5$; при $x < 5$ кривая вогнута, при $x > 5$ кривая выпукла.

4. $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

Отв. Точки перегиба при $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. На интервалах $(-\infty, -2)$ и $(1, +\infty)$ кривая вогнута, на интервале $(-2, 1)$ — выпукла.

5. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 45x - 14$.

Отв. Точки перегиба при $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. На интервалах $(-\infty, -1)$ и $(3, +\infty)$ кривая вогнута, на интервале $(-1, 3)$ — выпукла.

6. $y = e^{-x^2}$.

Отв. Точки перегиба при $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Интервалы вогнутости $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ и $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, интервалы выпуклости $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

§ 9. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Очень часто необходимо исследовать форму кривой $y = f(x)$, а следовательно, характер изменения соответствующей функции при неограниченном возрастании абсциссы или ординаты кривой. При этом представляет интерес частный случай, когда кривая при стремлении ее переменной точки в бесконечность неограниченно приближается к определенной прямой.

Прямая называется *асимптотой кривой*, если расстояние d от переменной точки $N(x; y)$ кривой до этой прямой при удалении точки $N(x; y)$ в бесконечность стремится к нулю (рис. 9.20). Асимптоты могут быть горизонтальными, вертикальными и наклонными.

Кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную асимптоту* $y = b$ только в том случае, если существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ или $x \rightarrow -\infty$, т. е. если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b. \quad (9.15)$$

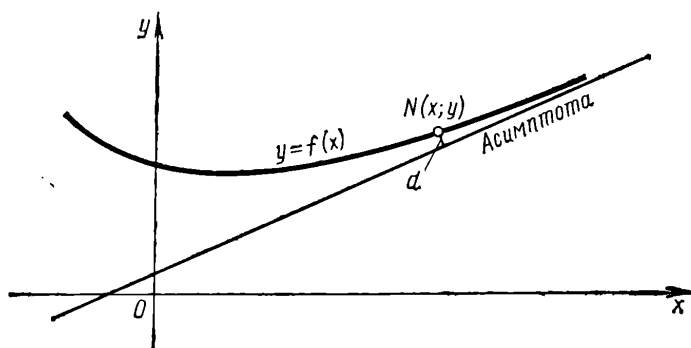


Рис. 9.20

Кривая $y = f(x)$ имеет *вертикальную асимптоту* $x = a$, если при $x \rightarrow a$, $x \rightarrow a-0$ или $x \rightarrow a+0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности, т. е. если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty, \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty. \quad (9.16)$$

Таким образом, для определения вертикальных асимптот надо найти те значения аргумента функции, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Наклонная асимптота определяется уравнением вида

$$y = kx + b. \quad (9.17)$$

Определим параметры k и b . Пусть $M(x; y)$ — точка кривой $y = f(x)$, а $N(x; \bar{y})$ — точка асимптоты (рис. 9.21). Расстояние от точки M до асимптоты равно длине отрезка MP . По определению асимптоты

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MP} = 0. \quad (9.18)$$

Обозначая через φ угол наклона асимптоты к оси абсцисс, из $\triangle NMP$ имеем

$$\overline{MN} = \frac{\overline{MP}}{\cos \varphi}.$$

Так как φ — постоянный угол, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MN} = \frac{1}{\cos \varphi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MP} = \frac{1}{\cos \varphi} \cdot 0 = 0. \quad (9.18')$$

С другой стороны,

$$\overline{MN} = |\overline{QM} - \overline{QN}| = |y - \bar{y}| = |f(x) - (kx + b)|.$$

Тогда равенство (9.18') принимает вид

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx - b] = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0. \quad (9.19)$$

Поскольку $x \rightarrow +\infty$, то должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} \right] = 0.$$

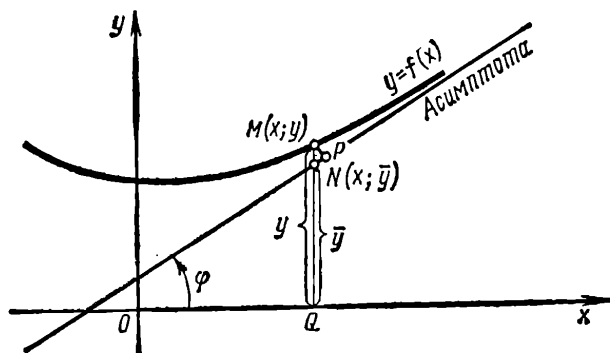


Рис. 9.21

Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0.$$

Так как при постоянном b предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - k \right] = 0, \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} - k = 0,$$

откуда получаем необходимое условие

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x}. \quad (9.20)$$

Из отношения (9.19), зная k , находим достаточное условие

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - kx]. \quad (9.21)$$

Если хотя бы один из пределов (9.20) или (9.21) не существует то кривая $y = f(x)$ асимптоты не имеет.

Исследование проведено при $x \rightarrow +\infty$, но все выкладки справедливы также для $x \rightarrow -\infty$.

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y = 1/x$.

Решение. Горизонтальные асимптоты находим по формулам (9.15):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Таким образом, кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Для определения вертикальной асимптоты находим значения x , вблизи которых функция $f(x) = 1/x$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Таким значением будет $x = 0$. Таким образом, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 0$. Итак, асимптотами данной кривой являются ось абсцисс и ось ординат (рис. 9.22).

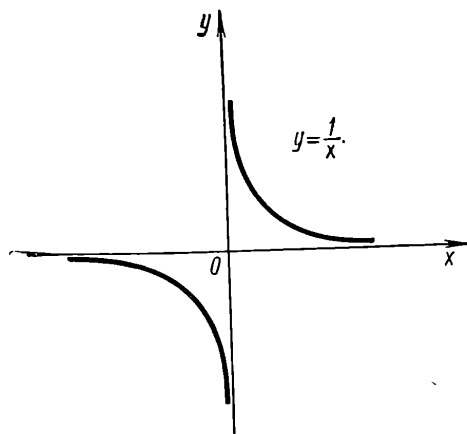


Рис. 9.22

Пример 2. Найти асимптоты кривой $y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}$.

Решение. Ищем вертикальные асимптоты:

при $x \rightarrow -3/2 - 0$, $y \rightarrow -\infty$;

при $x \rightarrow -3/2 + 0$, $y \rightarrow +\infty$.

Следовательно, прямая $x = -3/2$ есть вертикальная асимптота. Горизонтальных асимптот нет. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{x^2 + 1}{2x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [y - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{x^2 + 1}{2x + 3} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-3x + 2}{4x + 6} = -\frac{3}{4}.$$

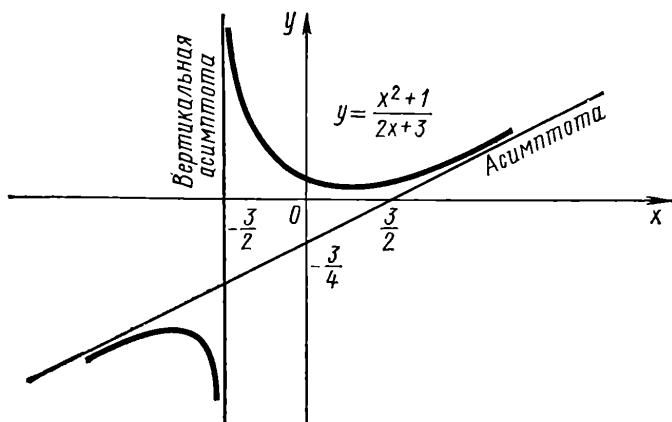


Рис. 9.23

Так как k и b имеют конечные значения, равные между собой при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$, то прямая $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ является наклонной асимптотой данной кривой (рис. 9.23).

Упражнения

Найти асимптоты следующих кривых:

1. $y = \frac{1}{x-1}$.

Отв. $x = 1$; $y = 0$.

2. $y = \frac{1}{(x+2)^3}$.

Отв. $x = -2$; $y = 0$.

3. $y^3 = 6x^2 + x^3$.

Отв. $y = x + 2$.

4. $y = \frac{2}{x^2 - 4}$.

Отв. $x = -2$; $x = 2$; $y = 0$.

5. $y = \frac{x-2}{x+4}$.

Отв. $x = -4$; $y = 1$.

6. $y = \frac{2x^2 + x + 3}{x+6}$.

Отв. $x = -6$; $y = 2x - 11$.

7. $y = x + e^{-x}$.

Отв. $y = x$.

8. $y = e^{-2x} \sin x$.

Отв. $y = 0$.

§ 10. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ И ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Под исследованием функции понимается определение:

- 1) области существования функции;
- 2) симметрии (четности и нечетности функции);
- 3) точек пересечения графика с осями координат;
- 4) непрерывности (точек разрыва функции);
- 5) асимптот графика функции;
- 6) интервалов возрастания и убывания функции;
- 7) экстремума функции;
- 8) интервалов выпуклости и вогнутости графика функции;
- 9) точек перегиба.

На основании проведенного исследования строится график функции (для большей точности рекомендуется построить еще отдельные точки графика). Проведенный таким образом анализ функции включает все ее основные характеристики.

Методы дифференциального исчисления особенно успешно используются при построении графиков функций, когда основной целью является возможно более точная характеристика хода изменения функции. Обычно применяемый прием построения по точкам принципиально непригоден, так как точки берутся случайно и не могут дать полного представления об особенностях графика.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Областью существования функции являются интервалы $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$. Функция существует при всех значениях x , кроме $x = -1$, так как только при этом значении знаменатель дроби обращается в нуль. Отметим, что при $x < 0$ имеем $y < 0$, а при $x > 0$ имеем $y > 0$.

2. Для исследования симметрии кривой проверим выполнение равенств $f(-x) = f(x)$ и $f(-x) = -f(x)$, т. е. выясним, чётна или нечётна функция. Имеем

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}, \quad f(-x) = \frac{(-x)^3}{2[(-x)+1]^2} = \frac{-x^3}{2(1-x)^2}.$$

Очевидно, что

$$-\frac{x^3}{2(1-x)^2} \neq \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

Далее имеем

$$f(-x) = -\frac{x^3}{2(1-x)^2} \neq -\frac{x^3}{2(x+1)^2} = -f(x),$$

так как

$$\frac{x^3}{(1-x)^2} \neq \frac{x^3}{(1+x)^2}.$$

Следовательно, ни одно из этих равенств не выполняется и функция не является ни четной ни нечетной, т. е.

$$f(x) \neq f(-x) \neq -f(x).$$

Таким образом, ни центра, ни оси симметрии график функции не имеет.

3. Точки пересечения графика функции с осью абсцисс находятся из уравнения $y=0$. В данном случае

$$\frac{x^3}{2(x+1)^2} = 0 \quad \text{или} \quad x^3 = 0,$$

откуда $x=0$. Кривая пересекает ось абсцисс в точке $(0; 0)$. Точки пересечения графика функции с осью ординат находятся из уравнения $x=0$. Отсюда

$$y = \frac{0^3}{2(0+1)^2} = \frac{0}{2} = 0.$$

Кривая пересекает ось ординат в точке $(0; 0)$. Итак, единственной точкой пересечения кривой с осями координат является начало координат $(0; 0)$.

4. Числитель и знаменатель дроби $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$ являются непрерывными функциями. Следовательно, функция y непрерывна при всех значениях x , кроме $x=-1$ (при этом значении знаменатель обращается в нуль).

Итак, интервалы непрерывности функции $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$.

5. Вертикальные асимптоты находим, приравняв нулю знаменатель исследуемой функции: $2(x+1)^2=0$, откуда $x+1=0$ и вертикальная асимптота $x=-1$. Выясним, существуют ли горизонтальные асимптоты у кривой. Для этого находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y &= \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{x^2+2x+1} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(x-2 + \frac{3x+2}{x^2+2x+1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (x-2) + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{3+2/x}{x+2+1/x} \right) = \pm \infty + \frac{1}{2} \cdot 0 = \pm \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, горизонтальных асимптот нет. Для выяснения существования наклонных асимптот, находим

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3}{x \cdot 2(x+1)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 - \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 1} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} 1 - \\ - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{2+1/x}{x+2+1/x} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x \right] = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 - x}{(x+1)^2} = \\ = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{-2 - 1/x}{1 + 2/x + 1/x^2} = \frac{1}{2} \cdot (-2) = -1.$$

Итак, существует наклонная асимптота

$$y = kx + b = \frac{1}{2}x - 1.$$

6. Для определения интервалов возрастания и убывания функции находим первую производную

$$y' = \frac{1}{2} \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3 \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}.$$

Решаем уравнение $y' = 0$. Тогда

$$\frac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3} = 0 \text{ или } x^2(x+3) = 0,$$

откуда находим критические точки: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$.

Определим значения первой производной y' , при которых она обращается в бесконечность. Это будет в случае, если знаменатель $2(x+1)^3 \rightarrow 0$, т. е. при $(x+1)^3 = 0$ или $x+1=0$, откуда находим: $x = -1$. Это значение не рассматриваем, так как оно не входит в область определения (интервал существования) функции. Критические точки $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$ разделяют интервал существования функции на следующие интервалы: $(-\infty, -3)$; $(-3, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, +\infty)$. В первом, третьем и четвертом интервалах первая производная сохраняет знак плюс, а во втором — минус. В этом можно убедиться, вычислив первую производную y' внутри этих интервалов. Так,

$$\begin{array}{ll} \text{при } x = -4 & y' = 8/27 > 0; \\ \text{при } x = -2 & y' = -2 < 0; \\ \text{при } x = -1/2 & y' = 5/2 > 0; \\ \text{при } x = 1 & y' = 1/4 > 0. \end{array}$$

Итак, в интервале $(-\infty, -3)$ функция возрастает,
в интервале $(-3, -1)$ функция убывает,
в интервале $(-1, 0)$ функция возрастает,
в интервале $(0, +\infty)$ функция возрастает.

7. Исследуем функцию на экстремум. В критической точке $x_1 = -3$ функция имеет максимум, так как при переходе через эту точку (из первого интервала во второй) первая производная меняет знак с плюса на минус. Максимальное значение функции

$$y_{\max} = \frac{(-3)^3}{2(-3+1)^2} = -\frac{27}{8}.$$

Во второй критической точке $x_2 = 0$ функция экстремума не имеет, так как при переходе через эту точку (из третьего интервала в четвертый) первая производная знака не меняет. Знаки во втором и третьем интервалах различны, поэтому можно было бы предположить, что в точке $x = -1$ есть экстремум. Однако этого сделать нельзя, так как при $x = -1$ исследуемая функция не существует и точка $x = -1$ не принадлежит области определения этой функции.

8. Определим интервалы выпуклости и вогнутости кривой. Найдем вторую производную

$$y'' = \frac{[2x(x+3) + x^2] 2(x+1)^3 - x^2(x+3) 6(x+1)^2}{4(x+1)^6} = \frac{3x}{(x+1)^4}.$$

Приравняем ее нулю:

$$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0 \text{ или } 3x = 0,$$

откуда находим $x = 0$.

Исследуем также значения x , при которых вторая производная $y'' = \infty$. Это будет в случае, если $(x+1)^4 \rightarrow 0$, т. е. $x+1=0$, откуда $x=-1$. Однако значение $x=-1$ рассматривать не будем, так как заданная функция при этом значении не существует. Точка $x=0$ делит интервалы существования $(-\infty, -1)$ и $(-1, +\infty)$ на три интервала $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$. В первом и втором интервалах вторая производная имеет знак минус, в третьем — плюс. Так,

$$\begin{array}{ll} \text{при } x = -3 & y'' = -9/16 < 0; \\ \text{при } x = -1/2 & y'' = -24 < 0; \\ \text{при } x = 1 & y'' = 3/16 > 0. \end{array}$$

Итак, в интервале $(-\infty, -1)$ кривая выпукла;
в интервале $(-1, 0)$ кривая выпукла;
в интервале $(0, +\infty)$ кривая вогнута.

9. Определим точки перегиба. При $x=0$ вторая производная $y''=0$, а при переходе из второго интервала (выпуклости) в третий интервал (вогнутости) вторая производная меняет знак. Следовательно, при $x=0$ кривая имеет точку перегиба, ордината которой

$$y = \frac{0^3}{2(0+1)^2} = \frac{0}{2} = 0,$$

т. е. точка перегиба с координатами $(0; 0)$ совпадает с началом координат.

10. Полученные данные полностью характеризуют исследуемую функцию и дают возможность построить график заданной функции (рис. 9.24).

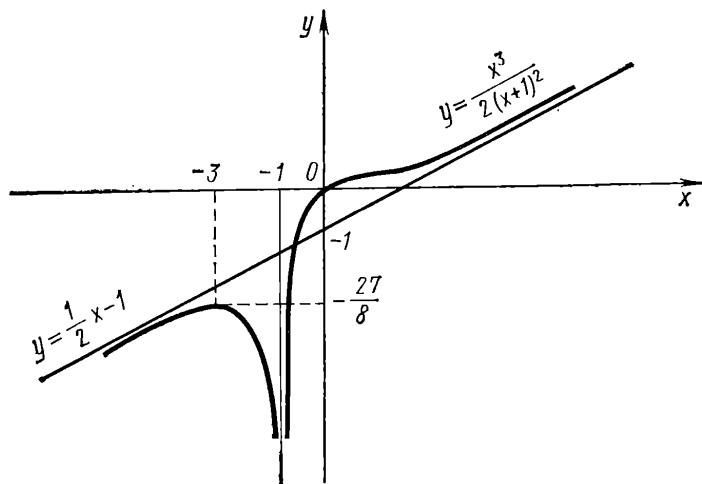


Рис. 9.24

Упражнения

Исследовать следующие функции и построить их графики:

1. $y = \frac{(x-1)^3}{2(x+1)^2}$.

Отв. Область определения $(-\infty, -1); (-1, +\infty)$. Вертикальная асимптота $x = -1$. Экстремум: максимум в точке $x = -5$; $y = -6\frac{3}{4}$. Точка перегиба при $x = 1$.

Асимптота $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$.

2. $y = \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^3$.

Отв. Область определения $(-\infty, -1); (-1, +\infty)$. Ось абсцисс кривая пересекает в точке $x = 1$. Асимптоты: $x = -1$ и $y = 1$. Экстремума нет. Точки перегиба $(1; 0)$ и $(3, 1/8)$

3. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

Отв. Область определения $(-\infty, +\infty)$. Функция нечетная, кривая симметрична относительно начала координат. Асимптота $y = 0$. Экстремум: в точке $x = -1$ — минимум; в точке $x = 1$ — максимум. Точки перегиба: $x_1 = -\sqrt[3]{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt[3]{3}$.

4. $y = x \ln x$.

Отв. Область определения $(0, +\infty)$. Ось абсцисс кривая пересекает в точке $x = 1$. Асимптот нет. В интервале $(0, e^{-1})$ функция убывает, в интервале $(e^{-1}, +\infty)$ — возрастает. Минимум в точке $x = e^{-1}$; $y_{\min} = -e^{-1}$. Точек перегиба нет. Кривая выпукла.

**§ 11. ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ОТНОШЕНИЯ ДВУХ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИХ ВЕЛИЧИН.
ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ**

При вычислении предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может оказаться, что при $x \rightarrow a$ или $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель дроби одновременно стремятся к нулю или к бесконечности, т. е. представляют отношения бесконечно малых или бесконечно больших величин.

Если какая-либо функция не определена в точке $x=a$ или при $x \rightarrow \infty$ (эта функция может иметь вполне определенный смысл при значениях $x \neq a$ или отличных от бесконечности), но обладает пределом, то отыскание такого предела называется *раскрытием неопределенности*.

Раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$ называется нахождение предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ бесконечно малы при $x \rightarrow a$. Так, функция $\frac{\sin x}{x}$ при $x=0$ не имеет смысла и представляет собой неопределенность $\frac{0}{0}$. Однако предел этого выражения при $x \rightarrow 0$ существует и равен 1.

Раскрытием неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ называется нахождение предела отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, когда функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ бесконечно большие при $x \rightarrow a$ (или при $x \rightarrow \infty$).

Рассмотрим вопрос о вычислении предела отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших. В первом случае имеем дело с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$, во втором — с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Сами по себе символы $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ лишены алгебраического смысла и используются лишь для обозначения вида неопределенности.

Неопределенности раскрывают с помощью **правила Лопиталья**.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывны, дифференцируемы внутри него, причем производная $\varphi'(x)$ нигде внутри отрезка не обращается в нуль, а функции обращаются в нуль в точке $x=a$, т. е. $f(a)=\varphi(a)=0$. Тогда, если существует предел отношения производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при $x \rightarrow a$, то существует и предел отношения функций $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x \rightarrow a$, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Выберем на отрезке $[a, b]$ точку $x \neq a$. Тогда, согласно теореме Коши, имеем

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

где $a < c < x$.

С другой стороны, по условию теоремы $f(a) = \varphi(a) = 0$ и, следовательно,

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Точка c находится между точками x и a , поэтому при $x \rightarrow a$ и $c \rightarrow a$. Переходя к пределу, если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы, получаем $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$ и $\lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$ также существует и равен A . Отсюда имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Правило Лопиталя применимо в том случае, если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$. В этом случае, полагая $x = 1/t$, видим, что $t \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, тогда

$$\lim_{t \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \varphi\left(\frac{1}{t}\right) = 0.$$

Применяя правило Лопиталя к отношению $\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)}$, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right) \left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Пример 1. Используя правило Лопиталя, вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Решение. Если в заданное отношение подставить вместо x нуль, то получим неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя, т. е. заменим отношение функций отношением их производных. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Решение. Непосредственная подстановка в заданное отношение значения $x=0$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15}$.

Решение. Непосредственная подстановка в заданное отношение значения $x=-1$ приводит к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}{x^4 - 2x^3 - 16x^2 + 2x + 15} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 10x + 2}{4x^3 - 6x^2 - 32x + 2} = \frac{5}{8}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Решение. Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Используем правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}.$$

Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя повторно правило Лопиталя, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Снова получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Третий раз применяя правило Лопиталя, окончательно находим

$$\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6}.$$

Пример 5. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{10}{x}}{\frac{1}{x}}$.

Решение. Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя правило Лопиталя, находим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{10}{x}}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 \cos \frac{10}{x} \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 10 \cos \frac{10}{x} = \\ &= 10 \cdot \cos 0 = 10 \cdot 1 = 10. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и дифференцируемы при любых $x \neq a$ в окрестности точки a , причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль. Кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty$$

и существует предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Тогда существует такой предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = A.$$

Теорема распространяется на случай, когда $x \rightarrow \infty$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказательство. Данное отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представим в виде

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Полученное отношение представляет собой неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применяя к нему доказанное выше правило Лопиталья, имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \frac{-\frac{1}{\varphi^2(x)} \varphi'(x)}{-\frac{1}{f^2(x)} f'(x)} \right\},$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} \right]^2 \cdot \frac{\varphi'(x)}{f'(x)} \right\}.$$

Предполагая предел дроби $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ конечным и отличным от нуля, получаем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right]^2 \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

или (после сокращения)

$$1 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)},$$

откуда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi'(x)}{f'(x)}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

что и требовалось доказать.

В случае, если $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$, следует найти предел дроби $\frac{f(x) + k\varphi(x)}{\varphi(x)}$, где $k = \text{const} \neq 0$. Тогда по теореме 2 имеем

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) + k\varphi(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) + k\varphi'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + k.$$

Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{\varphi(x)} + k \right] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} + k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} + k.$$

Вычитая величину k из обеих частей последнего равенства, находим

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Итак, теорема доказана для всех случаев. Заменяя x через $1/t$ (аналогично теореме 1), можно показать, что теорема 2 остается верной, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \infty.$$

Пример 6. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 4}$.

Решение. Это неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя правило Лопиталья для отношения двух бесконечно больших функций, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Применяя дважды правило Лопиталья, находим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

Правило Лопиталья состоит в том, что в случае неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, вместо предела отношения функций вычисляется предел отношения их производных. Это отношение во многих случаях проще исходного.

К неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$ сводятся другие неопределенности, которые символически записываются так: $0 \cdot \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ и $\infty - \infty$:

а) **Неопределенность вида $0 \cdot \infty$.** Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \infty.$$

Необходимо найти $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)]$.

Преобразуем произведение функций к виду

$$f(x) \varphi(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}, \quad \text{или} \quad f(x) \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$, или в случае, если

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

то неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 8. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$.

Решение. Применяя преобразование $f(x) \varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, имеем

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x},$$

т. е. неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая ее известным способом, находим

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +0} (-x) = 0.$$

б) Неопределенность вида $\infty - \infty$. Пусть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = +\infty.$$

Необходимо найти $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \varphi(x)]$. Разность функций $f(x) - \varphi(x)$ преобразуем к виду

$$f(x) - \varphi(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x) \varphi(x)}} \cdot [f(x) - \varphi(x)] = \frac{\frac{f(x) - \varphi(x)}{f(x) \varphi(x)}}{\frac{1}{f(x) \varphi(x)}} = \frac{\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{\varphi(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \varphi(x)}}.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \varphi(x)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(x)}{\varphi(x)} - \frac{\varphi(x)}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \varphi(x)}},$$

т. е. задача сводится к раскрытию неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Пример 9. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right)$.

Решение. При $x \rightarrow 1$ обе дроби в скобках являются бесконечно большими величинами, следовательно, имеем неопределен-

ность вида $\infty - \infty$. Выражение в скобках приводим к общему знаменателю, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x^2 - 1},$$

т. е. получена неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Далее имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

в) **Неопределенности вида 0^0 , 1^∞ , ∞^0** . Пусть дана функция

$$y = [f(x)]^{\varphi(x)}.$$

Эта функция принимает один из видов 0^0 , 1^∞ , ∞^0 при известном значении x . Если

$f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, то имеем неопределенность вида 0^0 ;

$f(x) = 1$, $\varphi(x) = \infty$, то имеем неопределенность вида 1^∞ ;

$f(x) = \infty$, $\varphi(x) = 0$, то имеем неопределенность вида ∞^0 .

Прологарифмируем данную функцию: $\ln y = \varphi(x) \ln f(x)$. В каждом из трех случаев $\ln y$ принимает неопределенный вид $0 \cdot \infty$, т. е. задача сводится к раскрытию неопределенности этого вида. Раскрытие неопределенности вида $0 \cdot \infty$ дает предел логарифма функции, но последний равен логарифму предела функции, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln f(x)$$

и

$$\ln \lim_{x \rightarrow a} y = \lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) \ln f(x)].$$

Потенцируя полученное равенство, имеем

$$e^{\ln \lim_{x \rightarrow a} y} = e^{\lim_{x \rightarrow a} [\varphi(x) \ln f(x)]}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow a} y = e^{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln f(x)},$$

т. е. задача сводится к определению предела $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \ln f(x)$.

Пример 10. Вычислить $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$.

Решение. Это неопределенность вида 0^0 . Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} (-x)} = e^0 = 1.$$

Пример 11. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

Решение. Это неопределенность вида 1^∞ . Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi/4} \ln (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \operatorname{tg} 2x \ln \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{1}{\frac{\sin x \cos x}{2}} \right) = -1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Пример 12. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/x}$.

Решение. Это неопределенность вида ∞^0 . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 2x)^{1/x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(1 + 2x)} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+2x}}{1}} = e^0 = 1.$$

Упражнения

Найти следующие пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}.$

Отв. 2.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 3x^2 - 4}.$

Отв. 3/5.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$

Отв. 2.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}.$

Отв. 1/3.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$

Отв. 2.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arcsin x}{\sin^3 x}.$

Отв. 1/6.

7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$

Отв. 0.

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x}.$

Отв. $+\infty$.

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$

Отв. 1.

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) - x}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2x}}.$

Отв. 0.

11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$

Отв. 5/3.

12. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\ln \operatorname{tg} 2x}.$

Отв. 1.

13. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$

Отв. 1/2.

14. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x.$

Отв. 1/2.

15. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

Отв. 1/e.

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2}}.$

Отв. 1.

17. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$

Отв. 1/e.

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$

Отв. e.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Основная задача дифференциального исчисления состоит в определении бесконечно малых изменений переменной величины, соответствующих бесконечно малым изменениям другой величины, когда известна функциональная зависимость между этими величинами.

Интегральное исчисление решает обратную задачу: зная бесконечно малые изменения одной величины, соответствующие бесконечно малым изменениям другой, найти функциональную зависимость между этими величинами.

Обозначим через $f(x)$ производную функции $F(x)$. Будем считать функцию $f(x)$ заданной, а функцию $F(x)$ — искомой. Тогда

$$dF(x) = f(x) dx$$

или

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Искомая функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* по отношению к функции $f(x)$.

Итак, первообразной функцией для данной функции $f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ или дифференциал которой равен $f(x) dx$.

Теорема 1. Если $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то

$$F(x) + C, \tag{10.1}$$

где C — произвольная постоянная, также будет первообразной для функции $f(x)$ в этом промежутке.

Доказательство. Действительно, поскольку производная постоянной величины равна нулю, то

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x). \tag{10.2}$$

Следовательно, если функция $f(x)$ имеет одну первообразную, то эта функция имеет и бесконечное множество их.

Возникает вопрос: все ли первообразные функции $f(x)$ можно получить по формуле (10.1) при различных значениях постоянной C или нет? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2. Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная для функции $f(x)$ в некотором промежутке, то функция

$$F(x) + C$$

представляет собой общее выражение всех первообразных функции $f(x)$ в этом промежутке.

Доказательство. Действительно, пусть $G(x)$ — произвольная первообразная функции $f(x)$ в некотором промежутке. По определению первообразной всюду в заданном промежутке

$$F'(x) = f(x), \quad G'(x) = f(x).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = G(x) - F(x), \quad (10.3)$$

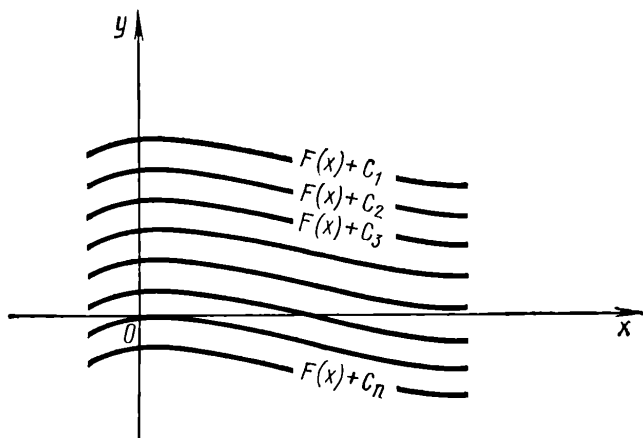


Рис. 10.1

для которой повсюду в данном промежутке

$$\varphi'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Во всех точках некоторого промежутка производная вспомогательной функции $\varphi'(x) = 0$, поэтому функция $\varphi(x)$ в этом промежутке сохраняет постоянное значение. Следовательно,

$$\varphi(x) = C = \text{const.}$$

Другими словами, используя соотношение (10.3), последнее равенство можно записать в виде

$$G(x) - F(x) = C,$$

откуда

$$G(x) = F(x) + C, \quad (10.4)$$

т. е. первообразная $G(x)$ получается из выражения (10.1) при некотором значении постоянной C , что и требовалось доказать.

Геометрически это означает, что график любой первообразной функции $G(x)$ получается сдвигом вверх или вниз графика функции $y = F(x)$ (рис. 10.1).

Итак, если известна одна первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, то все первообразные имеют вид (10.1), т. е. выражение

$$F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная, дает все функции, имеющие производную $f(x)$ или дифференциал $f(x) dx$.

Совокупность всех первообразных $F(x) + C$ от данной функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ (или дифференциала $f(x)dx$) и обозначается символом $\int f(x)dx$. Символ $\int$ (удлиненная латинская буква S) называется знаком интеграла.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (10.5)$$

где $F(x)$ — любая определенная первообразная для функции $f(x)$, C — произвольная постоянная.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а $f(x)dx$ — *подынтегральным выражением*. Из равенства (10.5) следует, что нахождение любой определенной первообразной и нахождение неопределенного интеграла представляют почти тождественные задачи. Поэтому оба эти действия называются *интегрированием* функции $f(x)$. Интегрирование возможно всегда, если функция $f(x)$ является непрерывной. Если же функция $f(x)$ является разрывной функцией, то можно говорить об интегрировании в том или другом промежутке ее непрерывности.

Задача дифференцирования функций формулируется так: дана функция $y = F(x)$; необходимо найти ее производную $y' = F'(x) = f(x)$. Задача интегрирования является обратной задачей: по данной производной $F'(x) = f(x)$ (или дифференциалу $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$) некоторой функции найти саму функцию $F(x)$.

График первообразной $F(x)$ от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $y = f(x)$.

Очевидно, что если передвинуть какую-либо интегральную кривую параллельно самой себе в направлении оси ординат на отрезок, изображающий слагаемое C , то получается другая интегральная кривая. Следовательно, неопределенный интеграл геометрически представляется совокупностью всех интегральных кривых, получаемых при непрерывном параллельном сдвиге одной из них в направлении оси Oy от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 10.1).

При вычислении неопределенного интеграла получается бесчисленное множество функций, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым. Для того чтобы из совокупности первообразных функций выделить одну определенную, необходимо задать некоторое дополнительное условие.

Пример. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 3)$, если угловой коэффициент касательной, проведенной к любой точке кривой, равен $2x$.

Решение. Согласно геометрическому смыслу производной имеем $\frac{dy}{dx} = 2x$, откуда $dy = 2x dx$. Проинтегрировав обе части полученного равенства, находим

$$\int dy = \int 2x dx \quad \text{или} \quad y = x^2 + C.$$

Последнее равенство не может служить ответом на вопрос задачи, так как оно содержит еще неопределенное постоянное C . Чтобы получить единственную первообразную функцию для данного дифференциала, используем дополнительные условия задачи. Положив в уравнении $x=1$ и $y=3$, получим: $3=1+C$, откуда $C=2$.

Итак, искомое уравнение кривой имеет вид $y=x^2+2$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим основные свойства неопределенного интеграла.

Свойство 1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.

Действительно, согласно определению неопределенного интеграла

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

тогда

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{dF(x)}{dx}.$$

С другой стороны, по определению первообразной функции

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),$$

следовательно,

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = \frac{d}{dx} [F(x) + C] = \frac{dF(x)}{dx} = f(x). \quad (10.6)$$

Отсюда

$$\frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] dx = f(x) dx,$$

т. е.

$$d \int f(x) dx = f(x) dx. \quad (10.7)$$

Таким образом, если за знаком дифференциала следует знак интеграла, то эти знаки взаимно уничтожаются.

Пример 1. Имеем

$$d \int 3x^2 dx = 3x^2 dx.$$

Рассмотрим, что получится, если переставить местами знаки дифференциала и интеграла. Пусть дана функция $F(x)$. Дифференциал этой функции $dF(x)$, а интеграл дифференциала $\int dF(x)$. Одной из первообразных функций является $F(x)$, поскольку $dF(x)$ равен подынтегральному выражению, а общим выражением всех первообразных функций является $F(x) + C$.

Итак,

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (10.8)$$

Пример 2. Имеем

$$\int d(3x^2 - x) = 3x^2 - x + C.$$

Соотношения (10.7) и (10.8) показывают, что интегрирование есть действие, обратное дифференцированию. Таким образом, правильность выполнения интегрирования может быть проверена дифференцированием.

Пример 3. Проверить правильность вычисления интеграла

$$\int (x^4 + x^2 - 1) dx = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + C.$$

Дифференциал от неопределенного интеграла

$$d\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + C\right) = \left(\frac{5x^4}{5} + \frac{3x^2}{3} - 1 + 0\right) dx = (x^4 + x^2 - 1) dx$$

является подынтегральным выражением данного интеграла.

Можно было ограничиться нахождением производной полученного выражения, т. е.

$$\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - x + C\right)' = x^4 + x^2 - 1,$$

которая вновь представляет подынтегральную функцию. Следовательно, данный интеграл вычислен правильно.

Свойство 2. *Постоянный множитель A можно выносить за знак неопределенного интеграла и вносить под знак неопределенного интеграла, т. е.*

$$\int Af(x) dx = A \int f(x) dx. \quad (10.9)$$

Дифференциал левой части этого равенства

$$d \int Af(x) dx = Af(x) dx,$$

а дифференциал правой части

$$d \left[A \int f(x) dx \right] = Ad \int f(x) dx = Af(x) dx,$$

так как постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала. Полученные выражения одинаковы, поэтому равенство (10.9) справедливо.

Пример 4. Имеем

$$\int 2x dx = 2 \int x dx = 2 \frac{x^2}{2} + C = x^2 + C.$$

Свойство 3. *Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов отдельных слагаемых:*

$$\int [u(x) + v(x) - w(x)] dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx - \int w(x) dx. \quad (10.10)$$

Справедливость этого равенства будет установлена, если дифференциал правой части равенства равен подынтегральному выражению левой части. Находим

$$d \left[\int u(x) dx + \int v(x) dx - \int w(x) dx \right] = d \int u(x) dx + d \int v(x) dx - d \int w(x) dx = u(x) dx + v(x) dx - w(x) dx = [u(x) + v(x) - w(x)] dx,$$

что и требовалось доказать.

Пример 5. Найти $\int (4x^4 + 4x^3 + 3x^2) dx$. Имеем

$$\begin{aligned} \int (4x^4 + 4x^3 + 3x^2) dx &= 4 \int x^4 dx + 4 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx = \\ &= 4 \int d\left(\frac{x^5}{5}\right) + 4 \int d\left(\frac{x^4}{4}\right) + 3 \int d\left(\frac{x^3}{3}\right) + C = \\ &= \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^4}{4} + \frac{3x^3}{3} + C = \frac{4}{5}x^5 + x^4 + x^3 + C. \end{aligned}$$

Здесь C является алгебраической суммой четырех произвольных постоянных слагаемых, входящих в каждый интеграл.

§ 3. ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ. НЕПОСРЕДСТВЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Пусть u — произвольная дифференцируемая функция x с непрерывной производной. Используя формулы дифференцирования, можно составить таблицу основных формул интегрирования (каждая формула этой таблицы легко проверяется дифференцированием). Всякой формуле дифференцирования $F'(x) = f(x)$; $dF(x) = f(x) dx$ соответствует формула интегрирования

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

- I. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C; \quad (n \neq -1).$
- II. $\int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$
- III. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$
- IV. $\int e^u du = e^u + C.$
- V. $\int \cos u du = \sin u + C.$
- VI. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
- VII. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
- VIII. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
- IX. $\int \frac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + C.$
- X. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsin} u + C.$

$$\text{XI. } \int \operatorname{tg} u \, du = -\ln |\cos u| + C.$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{ctg} u \, du = \ln |\sin u| + C.$$

$$\text{XII}^a. \int \frac{du}{\sin u} = \ln |\operatorname{cosec} u - \operatorname{ctg} u| + C.$$

$$\text{XII}^b. \int \frac{du}{\cos u} = \ln |\sec u + \operatorname{tg} u| + C.$$

$$\text{XIII. } \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C.$$

$$\text{XIV. } \int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$$

$$\text{XV. } \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C.$$

$$\text{XVI. } \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$\text{XVII. } \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$$

$$\text{XVIII. } \int \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$$

$$\text{XIX. } \int \sqrt{u^2 + a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C.$$

$$\text{XX. } \int \sqrt{u^2 - a^2} \, du = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C.$$

Здесь $u = f(x)$ — интегрируемая функция.

Рассматривая интегрирование как действие обратное дифференцированию, следует учитывать его особенности:

1) сравнительную трудность интегрирования, объясняемую тем, что в прямой задаче, как правило, вместе с постановкой задачи дается и метод ее решения, в то время как для обратных задач метод решения часто неизвестен или очень сложен (например, возведение чисел в n -ю степень и извлечение корня n -степени из числа);

2) невыполнимость интегрирования для многих функций в конечном виде (т. е. при помощи конечного числа операций над элементарными функциями). Даже интегралы от таких простых функций, как $\frac{\sin x}{x}$ или $\frac{1}{\ln x}$, невозможно представить никакой комбинацией элементарных функций (сравним с возведением в квадрат отрицательного числа и извлечением из отрицательного числа корня четной степени);

3) многозначность неопределенного интеграла (сравним с возведением числа в квадрат и извлечением квадратного корня из числа).

Из перечисленного ясно, что не существует общего метода, который позволял бы успешно выполнять интегрирование любой элементарной функции. Однако для целых классов функций такие методы существуют.

Вычисление интегралов непосредственно с помощью таблицы

интегралов называется *непосредственным интегрированием*. Этот способ интегрирования, несмотря на кажущуюся простоту, требует определенных навыков и практики. Смысл непосредственного интегрирования заключается в приведении подынтегральной функции к табличному виду (см. таблицу основных интегралов). Рассмотрим простейшие приемы такого приведения.

Пример 1. Найти $\int dx$.

Решение. Действия интегрирования и дифференцирования (как обратные) взаимно уничтожаются, следовательно,

$$\int dx = x + C.$$

Пример 2. Найти $\int x^6 dx$.

Решение. Воспользуемся формулой I таблицы интегралов:

$$\int x^6 dx = \frac{x^7}{7} + C.$$

Пример 3. Найти $\int (x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 2) dx$.

Решение. Это интеграл алгебраической суммы функций. Вынося постоянные множители за знак интеграла и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} \int (x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 2) dx &= \int x^4 dx + 3 \int x^3 dx - 6 \int x^2 dx + \\ &+ \int x dx - 2 \int dx = \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C = \\ &= \frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C. \end{aligned}$$

Проверка.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5} x^5 + \frac{3}{4} x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C \right) &= \frac{1}{5} \cdot 5x^4 + \frac{3}{4} \cdot 4x^3 - 2 \cdot 3x^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = x^4 + 3x^3 - 6x^2 + x - 2, \end{aligned}$$

т. е. производная полученного неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Пример 4. Найти $\int \frac{10x^8 + 3}{x^4} dx$.

Решение. Этот интеграл найдем разложением подынтегральной функции на слагаемые. Имеем

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{10x^8 + 3}{x^4} \right) dx &= \int \frac{10x^8}{x^4} dx + \int \frac{3}{x^4} dx = 10 \int x^4 dx + 3 \int x^{-4} dx = \\ &= 10 \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^{-3}}{-3} + C = 2x^5 - \frac{1}{x^3} + C. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx$.

Решение. Представим корни как степени аргумента с дробными показателями и воспользуемся формулой I таблицы интегралов, тогда

$$\begin{aligned} \int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2} + 2 \right) dx &= \int \left(3x^{1/2} - \frac{2}{5}x^{2/3} + 2 \right) dx = \\ &= 3 \int x^{1/2} dx - \frac{2}{5} \int x^{2/3} dx + 2 \int dx = 3 \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} \frac{x^{5/3}}{\frac{5}{3}} + 2x + C = \\ &= 2x^{3/2} - \frac{6}{25}x^{5/3} + 2x + C = 2x\sqrt{x} - \frac{6}{25}x\sqrt[3]{x^2} + 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти $\int \left(x^{-4} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx$.

Решение. Дроби, знаменатели которых представляют собой различные степени независимой переменной x , выразим как степени с отрицательными показателями и проинтегрируем как алгебраическую сумму функций, применяя формулу I таблицы интегралов:

$$\begin{aligned} \int \left(x^{-4} + \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \right) dx &= \int (x^{-4} + 3x^{-2} - 2x^{-3}) dx = \\ &= \int x^{-4} dx + 3 \int x^{-2} dx - 2 \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3}}{-3} + 3 \frac{x^{-1}}{-1} - 2 \frac{x^{-2}}{-2} + C = \\ &= -\frac{1}{3x^3} - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + C = -\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + C. \end{aligned}$$

Пример 7. Найти $\int \frac{2x + \frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Решение. Дробь, в числителе которой находится многочлен из степеней независимой переменной, а в знаменателе — степень независимой переменной в виде одночлена, предварительно надо разделить на знаменатель. В данном случае

$$\begin{aligned} \int \frac{2x + \frac{3}{5}\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x^2}} dx &= \int \left(\frac{2}{3}x^{1/3} + \frac{1}{5}x^{-1/6} \right) dx = \\ &= \frac{2}{3} \int x^{1/3} dx + \frac{1}{5} \int x^{-1/6} dx = \frac{2}{3} \frac{x^{4/3}}{4/3} + \frac{1}{5} \frac{x^{5/6}}{5/6} + C = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^4} + \frac{6}{25}\sqrt[6]{x^5} + C. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти $\int (x^2 - 3)(x - 1) dx$.

Решение. Перемножим многочлены и проинтегрируем каждое из слагаемых:

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3)(x - 1) dx &= \int (x^3 - x^2 - 3x + 3) dx = \\ &= \int x^3 dx - \int x^2 dx - 3 \int x dx + 3 \int dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 3x + C = \\ &= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти $\int (x-2)^3 dx$.

Решение. Возводя в куб подынтегральную функцию и интегрируя, находим

$$\begin{aligned}\int (x-2)^3 dx &= \int (x^3 - 6x^2 + 12x - 8) dx = \\ &= \int x^3 dx - 6 \int x^2 dx + 12 \int x dx - 8 \int dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + 12 \frac{x^2}{2} - 8x + C = \frac{1}{4} x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 8x + C.\end{aligned}$$

Этот интеграл можно найти короче:

$$\int (x-2)^3 dx = \int (x-2)^3 d(x-2) = \frac{1}{4} (x-2)^4 + C.$$

Пример 10. Найти $\int (\sqrt{x}-1)^2 \sqrt[3]{x} dx$.

Решение. Возводя в квадрат двучлен подынтегральной функции, умножая его на $\sqrt[3]{x}$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned}\int (\sqrt{x}-1)^2 \sqrt[3]{x} dx &= \int (x^{1/2}-1)^2 x^{1/3} dx = \\ &= \int (x-2x^{1/2}+1) x^{1/3} dx = \int x^{4/3} dx - 2 \int x^{5/6} dx + \int x^{1/3} dx = \\ &= \frac{x^{7/3}}{7/3} - 2 \frac{x^{11/6}}{11/6} + \frac{x^{4/3}}{4/3} + C = \frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} - \frac{12}{11} x \sqrt[6]{x^5} + \frac{3}{4} x \sqrt[3]{x} + C.\end{aligned}$$

Пример 11. Найти $\int x(x^2+1)^4 dx$.

Решение. Чтобы от выражения $x dx$ перейти к выражению $d(x^2+1)$, необходимо под знак интеграла ввести постоянный множитель 2, так как $d(x^2+1) = 2x dx$. Чтобы не нарушить равенства перед знаком интеграла надо написать $1/2$.

Тогда

$$\begin{aligned}\int x(x^2+1)^4 dx &= \frac{1}{2} \int 2x(x^2+1)^4 dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^4 d(x^2+1) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^5}{5} + C = \frac{1}{10} (x^2+1)^5 + C.\end{aligned}$$

Пример 12. Найти $\int \frac{x dx}{x^2+1}$.

Решение. Преобразуем данный интеграл следующим образом: $\frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1}$. Числитель подынтегральной дроби является теперь дифференциалом знаменателя; такой интеграл равен логарифму функции знаменателя. Таким образом,

$$\int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C = \ln |\sqrt{x^2+1}| + C.$$

Пример 13. Найти $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Так как

$$\cos x \, dx = d(\sin x),$$

то

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos x \, dx &= \int \sin^2 x \, d(\sin x) = \frac{1}{3} \int 3 \sin^2 x \, d(\sin x) = \\ &= \frac{1}{3} \sin^3 x + C. \end{aligned}$$

Пример 14. Найти $\int \frac{2x^3 - 5x^2 - 12x + 5}{2x + 3} dx$.

Решение. Если числитель дроби является многочленом более высокой степени, чем многочлен знаменателя, следует выделить целую часть дроби, производя деление (с остатком). Частное будет целой частью подынтегрального выражения, а остаток — числителем дробной части.

Разделив числитель подынтегральной функции на знаменатель, получим

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 5x^2 - 12x + 5 & 2x + 3 \\ \hline 2x^3 + 3x^2 & x^2 - 4x + \frac{5}{2x+3} \\ \hline -8x^2 - 12x & \\ -8x^2 - 12x & \\ \hline 5 & \end{array}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 - 5x^2 - 12x + 5}{2x + 3} dx &= \int \left(x^2 - 4x + \frac{5}{2x+3} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{5}{2} \ln |2x + 3| + C. \end{aligned}$$

Пример 15. Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Решение. Так как $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, то знаменатель подынтегральной дроби $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$. Тогда

$$-\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = 4 \int \frac{dx}{\sin^2 2x} = 4 \cdot \frac{1}{2} \int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = 2 \int \frac{d(2x)}{\sin^2 2x} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C.$$

Упражнения

Найти следующие интегралы:

1. $\int x^{5/2} dx$.

Отв. $\frac{2}{7} x^{7/2} + C$.

2. $\int \sqrt{2t} \, dt$.

Отв. $\frac{2t}{3} \sqrt{2t} + C$.

3. $\int \frac{dx}{x^2}$.

Отв. $-1/x + C$.

4. $\int \sqrt{2px} \, dx$.

Отв. $\frac{2\sqrt{2p}}{3} x \sqrt{x} + C$.

$$5. \int (2x^3 - 7x^2 + \sqrt{3}x - \pi) dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{2}x^4 - \frac{7}{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 - \pi x + C.$$

$$6. \int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{3}{5}x \sqrt[3]{x^3} - \frac{3}{4}x \sqrt[3]{x} + \\ + \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + C.$$

$$7. \int (2 - t^2)^2 \sqrt{t} dt.$$

$$\text{Омс. } \frac{8}{3}t \sqrt{t} - \frac{8}{7}t \sqrt[3]{t} + \\ + \frac{2}{11}t \sqrt[5]{t} + C.$$

$$8. \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x^3} - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt[5]{x^3}} \right) dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - \frac{1}{2x^2} - 8\sqrt{x} - \\ - \frac{15}{2} \sqrt[5]{x^2} + C.$$

$$9. \int \frac{x^4 - 3x^2 + 5\sqrt[3]{x} - 7x + 6}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$\text{Омс. } \sqrt[3]{x^2} \left(\frac{3}{14}x^4 - \frac{9}{8}x^2 + 5\sqrt[3]{x} - \right. \\ \left. - \frac{21}{5}x + 9 \right) + C.$$

$$10. \int \sin^3 x \cos x dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{\sin^4 x}{4} + C.$$

$$11. \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{\ln^2 |x|}{2} + C.$$

$$12. \int \frac{\cos x}{\sin^7 x} dx.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{6} \operatorname{cosec}^6 x + C.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ СПОСОБОМ ЗАМЕНЫ ПЕРЕМЕННОЙ (ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПОДСТАНОВКОЙ)

Интегрирование подстановкой с введением новых переменных заключается в том, что при вычислении интеграла $\int f(x) dx$ вместо переменной x вводится новая переменная, связанная с x некоторой зависимостью. Эту зависимость стараются выбрать так, чтобы преобразованный интеграл был проще данного и сводился к табличному интегралу.

Тип подстановки определяется видом подынтегральной функции.

Пример 1. Методом подстановки найти $\int \sin^2 x \cos x dx$.

Решение. Пусть $\sin x = z$, тогда $\cos x dx = dz$. Следовательно,

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Этот же интеграл можно вычислить так:

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 2. Найти $\int e^{3x} dx$.

Решение. Пусть $3x = t$, откуда $x = t/3$, и тогда $dx = \frac{dt}{3}$. Следовательно,

$$\int e^{3x} dx = \int \frac{e^t dt}{3} = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Этот интеграл можно взять непосредственно:

$$\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} 3dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int x \sqrt{x^2 - 2} dx$.

Решение. Заменим переменную x новой переменной t : $\sqrt{x^2 - 2} = t$ и $x = \sqrt{t^2 + 2}$. Тогда $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} dt$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{x^2 - 2} dx &= \int \sqrt{t^2 + 2} \cdot t \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2}} dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \\ &= \frac{(x^2 - 2) \sqrt{x^2 - 2}}{3} + C. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно взять и непосредственно, представив его в виде

$$\frac{1}{2} \int (x^2 - 2)^{\frac{1}{2}} d(x^2 - 2), \text{ так как } x dx = \frac{1}{2} d(x^2 - 2).$$

Пример 4. Найти $\int \sin 2x dx$.

Решение. Введем подстановку $t = 2x$, откуда $dt = 2dx$ и $dx = \frac{dt}{2}$.

Тогда

$$\int \sin 2x dx = \int \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Пример 5. Методом подстановки найти $\int \sqrt{25 - x^2} x dx$.

Решение. Пусть $25 - x^2 = t$, тогда $dt = -2x dx$, откуда $x dx = -\frac{dt}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{25 - x^2} x dx &= \int (25 - x^2)^{1/2} x dx = \int t^{1/2} \left(-\frac{dt}{2}\right) = -\frac{1}{2} \int t^{1/2} dt = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t^{3/2} + C = -\frac{1}{3} t \sqrt{t} + C = -\frac{1}{3} (25 - x^2) \sqrt{25 - x^2} + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Методом подстановки найти $\int \frac{x dx}{\sqrt{9 + x^2}}$.

Решение. Введем подстановку $9 + x^2 = t$, тогда $dt = 2x dx$, откуда $x dx = \frac{dt}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{9 + x^2}} &= \int (9 + x^2)^{-1/2} x dx = \int t^{-1/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = \\ &= \frac{t^{1/2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} + C = \sqrt{t} + C = \sqrt{9 + x^2} + C. \end{aligned}$$

Метод подстановки для интегралов, приводящихся к формуле II таблицы основных интегралов, используется весьма часто. В формуле II числитель подынтегральной дроби представляет собой дифференциал знаменателя. Следовательно, если под знаком

интеграла имеется дробь, необходимо прежде всего проверить, не является ли числитель этой дроби дифференциалом знаменателя.

Пример 7. Найти $\int \frac{x dx}{4-x^2}$.

Решение. Пусть $4-x^2=t$. Проверим, не является ли числитель дифференциалом этого выражения, умноженным, быть может, на постоянный множитель. Действительно, $dt = -2x dx$ отличается от числителя на постоянный множитель -2 . Тогда переменная часть дифференциала

$$x dx = -\frac{dt}{2}.$$

Подставляя эти значения в данный интеграл, имеем

$$\int \frac{x dx}{4-x^2} = \int \frac{-\frac{dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |4-x^2| + C.$$

Пример 8. Методом подстановки найти $\int \frac{dx}{(x-a)^m}$.

Решение. Пусть $x-a=t$, тогда $dt=dx$. Следовательно, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m} &= \int \frac{dt}{t^m} = \int t^{-m} dt = \frac{t^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{1}{(1-m)t^{m-1}} + C = \\ &= \frac{1}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

Решение. Так как $1+\sin x = 2\cos^2(\pi/4-x/2)$, то

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2(\pi/4-x/2)} = -\int \frac{d(\pi/4-x/2)}{\cos^2(\pi/4-x/2)} = -\operatorname{tg}(\pi/4-x/2) + C.$$

Данный интеграл можно вычислить и с помощью подстановки $u = \cos x$, тогда $du = -\sin x dx$ и $\sin x dx = -du$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sin x} &= \operatorname{tg} x - \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + \int \frac{du}{u^2} = \operatorname{tg} x + \int u^{-2} du = \\ &= \operatorname{tg} x - \frac{1}{u} + C = \operatorname{tg} x - \sec x + C. \end{aligned}$$

Пример 10. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$.

Решение. Введем подстановку $t = \sqrt{x+1}$, откуда $x = t^2 - 1$, следовательно, $dx = 2t dt$.

Тогда

$$\int \frac{2t}{t+1} dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2t - 2 \ln |t+1| + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x , имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1} = 2\sqrt{x+1} - 2 \ln |\sqrt{x+1}+1| + C.$$

Пример 11. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$.

Решение. Данный интеграл легко приводится к табличному интегралу XVI:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}x)^2}}.$$

Здесь $a = \sqrt{3}$, $u = \sqrt{2}x$. Имеем: $du = \sqrt{2}dx$, откуда $dx = \frac{du}{\sqrt{2}}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}} &= \int \frac{\frac{du}{\sqrt{2}}}{\sqrt{3-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{du}{\sqrt{3-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{u}{\sqrt{3}} + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}x + C. \end{aligned}$$

Формулы XIII—XX можно использовать, если вместо квадратного двучлена дан квадратный трехчлен. Тогда из данного квадратного трехчлена надо выделить полный квадрат суммы или разности и основание этого квадрата приравнять u . Квадратный трехчлен сводится, таким образом, к квадратному двучлену и получается одна из формул XIII—XX.

Пример 12. Найти $\int \frac{dx}{x^2+5x+8}$.

Решение. Из квадратного трехчлена выделяем полный квадрат суммы:

$$\begin{aligned} x^2+5x+8 &= x^2+2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 8 = \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 8 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+8} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}}.$$

Применяем подстановку $u = x + \frac{5}{2}$, откуда $du = dx$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+5x+8} &= \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \int \frac{du}{u^2 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{5}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = \frac{2\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{2x+5}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}}$.

Решение. Выделим из данного квадратного трехчлена полный квадрат разности

$$\begin{aligned} 3+x-x^2 &= -(x^2-x-3) = -\left[x^2-2 \cdot \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\right] = \\ &= -\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}\right] = \frac{13}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3+x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{13/4-(x-1/2)^2}}.$$

Пусть $u = x - 1/2$, тогда $du = dx$ и данный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{13/4-(x-1/2)^2}} &= \int \frac{du}{\sqrt{13/4-u^2}} = \arcsin \frac{u}{\sqrt{13/2}} + C = \\ &= \arcsin \frac{2u}{\sqrt{13}} + C = \arcsin \frac{2(x-1/2)}{\sqrt{13}} + C = \arcsin \frac{2x-1}{\sqrt{13}} + C. \end{aligned}$$

Пример 14. Найти $\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

Решение. Выделяем полный квадрат суммы в знаменателе подынтегральной дроби:

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 6 = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Применим подстановку $u = x + \frac{5}{2}$, тогда $du = dx$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+5x+6} &= \int \frac{dx}{(x+5/2)^2-1/4} = \int \frac{du}{u^2-1/4} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{u-1/2}{u+1/2} \right| + C = \\ &= \ln \left| \frac{x+5/2-1/2}{x+5/2+1/2} \right| + C = \ln \left| \frac{x+2}{x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

Рассмотрим вычисление интегралов, содержащих в числителе двучлен вида $Ax + B$, а в знаменателе — квадратный трехчлен или квадратный корень из него.

В интегралах такого типа необходимо прежде всего выделить полный квадрат суммы (или разности) из квадратного трехчлена и заменить его при помощи подстановки квадратным двучленом.

Пример 15. Найти $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+12} dx$.

Решение. Выделим полный квадрат разности из квадратного трехчлена подынтегральной дроби:

$$x^2 - 4x + 12 = x^2 - 2 \cdot 2x + 4 - 4 + 12 = (x-2)^2 + 8.$$

Следовательно,

$$\int \frac{3x+2}{x^2-4x+12} dx = \int \frac{3x+2}{(x-2)^2+8} dx.$$

Пусть $u = x - 2$, тогда $du = dx$. Кроме того, $x = u + 2$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{x^2-4x+12} dx &= \int \frac{3x+2}{(x-2)^2+8} dx = \int \frac{3(u+2)+2}{u^2+8} du = \\ &= \int \frac{3u+8}{u^2+8} du = \int \frac{3u du}{u^2+8} + \int \frac{8 du}{u^2+8} = 3 \int \frac{u du}{u^2+8} + 8 \int \frac{du}{u^2+8}. \end{aligned}$$

Первый из интегралов вычисляем с помощью подстановки $t = u^2 + 8$, откуда $dt = 2u du$, следовательно, $u du = \frac{dt}{2}$.

Второй из интегралов является табличным. Таким образом,

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{u du}{u^2+8} + 8 \int \frac{du}{u^2+8} &= 3 \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} + 8 \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{8}} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t} + \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{8}} = \frac{3}{2} \ln |t| + \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{8}} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln (u^2+8) + \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2} \ln [(x-2)^2+8] + \\ &+ \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2} \ln (x^2-4x+12) + \sqrt{8} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{8}} + C. \end{aligned}$$

Пример 16. Найти $\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx$.

Решение. Выделим в знаменателе квадрат разности:

$$\begin{aligned} 7+6x-x^2 &= -(x^2-6x-7) = -(x^2-2 \cdot 3x+9-9-7) = \\ &= -(x-3)^2-16] = 16-(x-3)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx.$$

Воспользуемся подстановкой $u = x-3$, тогда $du = dx$ и $x = u+3$.

Данный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx &= \int \frac{x+4}{16-(x-3)^2} dx = \int \frac{u+3+4}{\sqrt{16-u^2}} du = \\ &= \int \frac{u du}{\sqrt{16-u^2}} + 7 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}}. \end{aligned}$$

Первый из интегралов в правой части полученного равенства вычислим с помощью подстановки $t = 16-u^2$, тогда $dt = -2u du$ и $u du = -\frac{dt}{2}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int \frac{u du}{\sqrt{16-u^2}} &= \int \frac{-\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^{1/2}} = -\frac{1}{2} \int t^{-1/2} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^{1/2}}{1/2} + C_1 = \\ &= -\sqrt{t} + C_1 = -\sqrt{16-u^2} + C_1 = -\sqrt{7+6x-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

Второй из интегралов является табличным:

$$7 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = 7 \arcsin \frac{u}{4} + C_2 = 7 \arcsin \frac{x-3}{4} + C_2.$$

Искомый интеграл равен

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{7+6x-x^2}} dx = -\sqrt{7+6x-x^2} + 7 \arcsin \frac{x-3}{4} + C$$

(здесь $C_1 + C_2 = C$).

Пример 17. Найти $\int \frac{5x+3}{3x^2+2x+1} dx$.

Решение. Этот интеграл и вообще интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} dx$, где A, B, a, b, c — постоянные коэффициенты, можно вычислять с помощью специального приема, сводящегося к делению числителя подынтегральной дроби на производную знаменателя.

В данном случае $(3x^2+2x+1)' = 6x+2$, следовательно, разделим числитель на $6x+2$:

$$\frac{5x+3}{6x+2} = \frac{5x+\frac{5}{3}}{\frac{6x+2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}}$$

Итак, получается тождество $5x+3 = \frac{5}{6}(6x+2) + \frac{4}{3}$, которое и подставляем в числитель подынтегральной функции. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{5x+3}{3x^2+2x+1} dx &= \int \frac{\frac{5}{6}(6x+2) + \frac{4}{3}}{3x^2+2x+1} dx = \\ &= \frac{5}{6} \int \frac{6x+2}{3x^2+2x+1} dx + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}} = \frac{5}{6} \int \frac{d(3x^2+2x+1)}{3x^2+2x+1} + \\ &+ \frac{4}{9} \int \frac{dx}{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}} = \frac{5}{6} \ln(3x^2+2x+1) + \frac{4}{9} \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{9}} = \\ &= \frac{5}{6} \ln(3x^2+2x+1) + \frac{4}{9} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{3}\right)}{(x+1)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \\ &= \frac{5}{6} \ln(3x^2+2x+1) + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}} + C = \\ &= \frac{5}{6} \ln(3x^2+2x+1) + \frac{4}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x+1}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

С помощью этого же приема можно вычислять интегралы вида $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$. Числитель делят на производную подкоренного выражения и, производя аналогичную подстановку, в числителе получают два интеграла: первый из них всегда сводится к виду $\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$, а второй — преобразуется в зависимости от корней подкоренного трехчлена.

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int (x+5)^3 dx$.

Омс. $\frac{1}{4} (x+5)^4 + C$.

2. $\int (x+1)^2 x dx$.

Омс. $\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C$.

3. $\int (x^2+5)^2 2x dx$.

Омс. $\frac{(x^2+5)^3}{3} + C$.

4. $\int (9+7x^2)^5 x dx$.

Омс. $\frac{1}{84} (9+7x^2)^6 + C$.

5. $\int \frac{x dx}{x^2+1}$.

Омс. $\ln | \sqrt{x^2+1} | + C$.

6. $\int \sqrt{1+x^2} x dx$.

Омс. $\frac{1}{3} (1+x^2) \sqrt{1+x^2} + C$.

7. $\int \frac{(a^{2/3} - x^{2/3})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Омс. $2a^{4/3} x^{1/2} - \frac{12}{7} a^{2/3} x^{7/6} + \frac{6}{11} x^{11/6} + C$.

8. $\int \sqrt{1-x} dx$.

Омс. $-\frac{2}{3} (1-x) \sqrt{1-x} + C$.

9. $\int (\sin x^2) x dx$.

Омс. $-\frac{1}{2} \cos x^2 + C$.

10. $\int \cos^5 4x \sin 4x dx$.

Омс. $-\frac{1}{24} \cos^6 4x + C$.

11. $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx$.

Омс. $\frac{1}{4} \operatorname{arctg}^4 x + C$.

12. $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin x dx$.

Омс. $-\frac{3}{5} \cos x \sqrt[3]{\cos^2 x} + C$.

13. $\int 2e^{2x} dx$.

Омс. $e^{2x} + C$.

14. $\int e^{x+x^2} (1+2x) dx$.

Омс. $e^{x+x^2} + C$.

15. $\int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}}$.

Омс. $-\ln(1+e^{-x}) + C$.

16. $\int \frac{4dx}{e^{2x}}$.

Омс. $-2e^{-2x} + C$.

17. $\int e^{\operatorname{tg} 3x} \sec^2 3x dx$.

Омс. $\frac{1}{3} e^{\operatorname{tg} 3x} + C$.

18. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}$.

Омс. $-\frac{1}{3 \ln^3 |x|} + C$.

19. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} dx$.

Омс. $\frac{2}{3} \arcsin x \sqrt{\arcsin x} + C$.

20. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}} dx$.

Омс. $-2 \sqrt{5+\cos x} + C$.

21. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$.

Омс. $\frac{2}{3} \ln |x| \sqrt{\ln |x|} + C$.

22. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx$.

Омс. $-\frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$.

23. $\int \frac{dx}{x(1-\ln x)}$.

Омс. $-\ln |1-\ln x| + \ln C = \ln \left| \frac{C}{1-\ln x} \right|$.

24. $\int \frac{x^4}{x-1} dx$.

Омс. $\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln |x-1| + C$.

§ 1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод основан на правиле дифференцирования произведения двух функций. Пусть даны функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$, имеющие непрерывные производные. Найдем дифференциал произведения этих функций:

$$d(uv) = u dv + v du.$$

Интегрируя обе части равенства, получим

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

или (так как $\int d(uv) = uv + C$)

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Здесь произвольной постоянной C не пишем, так как в правой части формулы остался неопределенный интеграл, содержащий также произвольную постоянную.

Последняя формула называется *формулой интегрирования по частям*. С помощью этой формулы вычисление интеграла, стоящего в левой части равенства, сводится к вычислению другого интеграла, стоящего в правой части, который часто оказывается более простым.

Нельзя дать общего правила разложения подынтегрального выражения на множители u и dv . Разложение следует делать так, чтобы можно было определить функцию v и чтобы полученный интеграл был известен или, по крайней мере, был проще исходного.

Интегрирование по частям чаще всего применяется в случае, если под знаком интеграла имеется произведение алгебраической и трансцендентной функций. Обычно за u принимается функция, которая в результате дифференцирования упрощается, а за dv — та часть подынтегрального выражения, содержащая dx , интеграл от которой можно найти. К числу интегралов, вычисляемых методом интегрирования по частям, относятся интегралы следующих видов:

$$\int P(x) \sin ax \, dx, \quad \text{здесь } u = P(x);$$

$$\int P(x) \cos ax \, dx, \quad \text{здесь } u = P(x);$$

$$\int P(x) \arcsin ax \, dx, \quad \text{здесь } u = \arcsin ax;$$

$$\int P(x) \arccos ax \, dx, \quad \text{здесь } u = \arccos ax;$$

$$\begin{aligned} \int P(x) \operatorname{arctg} ax \, dx, & \text{ здесь } u = \operatorname{arctg} ax; \\ \int P(x) \operatorname{arccotg} ax \, dx, & \text{ здесь } u = \operatorname{arccotg} ax; \\ \int P(x) \ln ax \, dx, & \text{ здесь } u = \ln ax; \\ \int P(x) e^{ax} \, dx, & \text{ здесь } u = P(x); \\ \int P(\ln x) \, dx, & \text{ здесь } P(\ln x) = u, \end{aligned}$$

где $P(x)$ — многочлен относительно x .

Интегралы вида

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx \quad \text{и} \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

также находятся интегрированием по частям. Кроме перечисленных случаев, в которых интегрирование по частям является наилучшим методом, этот способ можно применять при интегрировании иррациональных функций и в ряде других случаев.

Пример 1. Найти $\int \ln x \, dx$.

Решение. Пусть $u = \ln x$, $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int dx = x$.

Постоянная C в этом случае не пишется (она записывается только в окончательном результате). Тогда имеем

$$\int \ln x \, dx = x \ln |x| - \int x \frac{dx}{x} = x \ln |x| - x + C.$$

Пример 2. Найти $\int x \ln x \, dx$.

Решение. Здесь целесообразно принять $u = \ln x$, $dv = x \, dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \frac{x^2}{2}$. Следовательно,

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln |x| - \int \frac{x^2}{2x} \, dx = \frac{x^2 \ln |x|}{2} - \frac{x^2}{4} + C.$$

Пример 3. Найти $\int xe^x \, dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = e^x \, dx$, тогда $du = dx$, $v = \int e^x \, dx = e^x$. Следовательно,

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 4. Найти $\int xe^{2x} \, dx$.

Решение. Положим $x = u$, $e^{2x} dx = dv$, откуда

$$dx = du, \quad v = \int e^{2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int xe^{2x} \, dx &= x \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \, dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{2x} + C = \\ &= \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int x \cos x dx$.

Решение. Пусть $u = x$, $dv = \cos x dx$, тогда $du = dx$, $v = \sin x$. Следовательно,

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Пример 6. Найти $\int \arctg x dx$.

Решение. Положим $u = \arctg x$, $dv = dx$, тогда $du = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Окончательно имеем

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Пример 7. Найти $\int x \arcsin x dx$.

Решение. Пусть $u = \arcsin x$, $dv = x dx$, тогда

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$\begin{aligned} \int x \arcsin x dx &= \frac{x^2}{2} \arcsin x - \int \frac{1}{2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \\ &+ \frac{1}{2} \int \frac{-x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} \int \sqrt{1-x^2} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{1}{2} \arcsin x + C = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{x}{4} \sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x + C. \end{aligned}$$

Формулу интегрирования по частям приходится иногда применять последовательно несколько раз.

Пример 8. Найти $\int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$.

Решение. Пусть $u = \ln^2 x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$. Дифференцируя первое равенство, получаем

$$du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{2 \ln x}{x} dx;$$

интегрируя второе равенство, находим

$$\int dv = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx,$$

откуда

$$v = -\frac{1}{x}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx = -\frac{\ln^2 |x|}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{2 \ln x}{x} dx = -\frac{\ln^2 |x|}{x} + 2 \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

Применим повторно интегрирование по частям, положив $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^2}$, тогда

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx &= -\frac{\ln^2 |x|}{x} + 2 \left[-\frac{\ln |x|}{x} - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} \right] = \\ &= -\frac{\ln^2 |x|}{x} - 2 \frac{\ln |x|}{x} + 2 \int x^{-2} dx = -\frac{\ln^2 |x|}{x} - 2 \frac{\ln |x|}{x} - \frac{2}{x} + C = \\ &= -\frac{1}{x} (\ln^2 |x| + 2 \ln |x| + 2) + C = -\frac{1}{x} [(\ln |x| + 1)^2 + 1] + C. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти $\int x^3 \sin x dx$.

Решение. Положим $u = x^3$, $dv = \sin x dx$, откуда $du = 3x^2 dx$, $v = -\cos x$. Следовательно,

$$\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx.$$

Чтобы вычислить интеграл $\int x^2 \cos x dx$ снова применим интегрирование по частям, положив $u = x^2$, $dv = \cos x dx$, тогда $du = 2x dx$, $v = \sin x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} -x^3 \cos x + 3 \int x^2 \cos x dx &= -x^3 \cos x + 3 \left[x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx \right] = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \int x \sin x dx. \end{aligned}$$

Для вычисления полученного интеграла третий раз применяем интегрирование по частям, положив $u = x$, $dv = \sin x dx$, откуда $dx = du$, $v = -\cos x$.

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int x^3 \sin x dx &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6 \left(-x \cos x + \int \cos x dx \right) = \\ &= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C = (3x^2 - 6) \sin x + \\ &\quad + (6 - x^2) x \cos x + C. \end{aligned}$$

Пример 10. Найти $\int e^{2x} \sin 2x dx$.

Решение. Если подынтегральное выражение является произведением показательной функции на синус или косинус, то в этом случае безразлично, какой из сомножителей принять за u . Положим $u = e^{2x}$, $dv = \sin 2x dx$. Следовательно,

$$du = 2e^{2x}, \quad v = \int \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \cos 2x.$$

Тогда

$$\int e^{2x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \int e^{2x} \cos 2x dx.$$

Интегрируем повторно по частям, однако теперь надо обязательно брать за u ту функцию, которая была принята первый раз. Пусть $u = e^{2x}$, $dv = \cos 2x dx$, тогда $du = 2e^{2x} dx$, $v = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x$. Следовательно,

$$\int e^{2x} \sin 2x dx = -\frac{1}{2} e^{2x} \cos 2x + \frac{1}{2} e^{2x} \sin 2x - \int e^{2x} \sin 2x dx.$$

Последний интеграл аналогичен данному. Поэтому, перенося его в левую часть равенства и приводя подобные члены, имеем

$$2 \int e^{2x} \sin 2x dx = \frac{1}{2} e^{2x} (\sin 2x - \cos 2x),$$

откуда искомый интеграл

$$\int e^{2x} \sin 2x dx = \frac{1}{4} e^{2x} (\sin 2x - \cos 2x) + C.$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int x \sin 2x dx.$

Отв. $-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

2. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

Отв. $\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x + C.$

3. $\int \sqrt{1-x^2} dx.$

Отв. $\frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x + C.$

4. $\int x \ln x dx.$

Отв. $\frac{1}{2} x^2 \ln |x| - \frac{1}{4} x^2 + C.$

5. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx.$

Отв. $-\frac{\ln |x|}{x} - \frac{1}{x} + C.$

6. $\int x^3 \ln x dx.$

Отв. $\frac{x^4 \ln |x|}{4} - \frac{x^4}{16} + C.$

7. $\int \cos 2x \sin x dx.$

Отв. $-\frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + C.$

8. $\int x^2 e^{x^2} dx.$

$$\text{Отв. } \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

$$9. \int \sqrt{x} \cos \sqrt{x} dx.$$

$$\text{Отв. } 2x \sin \sqrt{x} + 4 \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 4 \sin \sqrt{x} + C.$$

$$10. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\text{Отв. } -\sqrt{1-x^2} \arcsin x + x + C.$$

$$11. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$\text{Отв. } x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$$

$$12. \int \frac{\ln \sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$\text{Отв. } \operatorname{tg} x \ln |\sin x| - x + C.$$

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ. ФОРМУЛА ПРИВЕДЕНИЯ

Рациональной дробью называется дробь, числитель и знаменатель которой представляют собой целые рациональные функции, т. е. дробь вида

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad (11.1)$$

где a_i ($i=0, 1, 2, \dots, m$) и b_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) — действительные числа, причем $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$.

Будем предполагать, что эти многочлены не имеют общих корней.

Рациональная дробь (11.1) называется *правильной*, если степень m числителя дроби меньше степени n знаменателя ($m < n$). Рациональная дробь (11.1) называется *неправильной*, если степень m числителя дроби больше или равна степени n знаменателя ($m \geq n$).

Если рациональная дробь является неправильной, то, разделив по правилу деления многочленов многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$, можно всегда выделить целую часть (т. е. многочлен) и представить такую дробь в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) + \frac{j(x)}{g(x)}, \quad (11.2)$$

где $h(x)$ — многочлен степени k , причем $k < n$; $j(x)$ — многочлен степени i , причем $i < n$.

Пусть требуется найти интеграл от рациональной дроби вида

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx,$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены с действительными коэффициентами.

В случае если рациональная дробь $\frac{f(x)}{g(x)}$ неправильная, то ее интегрирование сводится к интегрированию правой части равенства (11.2). Интегрирование многочленов несложно, поэтому основная трудность заключается в интегрировании правильных рацию-

нальных дробей, у которых степень числителя меньше степени знаменателя. Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде конечного числа *простейших дробей* следующих типов:

$$\text{I. } \frac{A}{x-a};$$

$$\text{II. } \frac{A}{(x-a)^k}, \text{ где } k=2, 3, 4, \dots;$$

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, где дискриминант трехчлена $\frac{p^2}{4}-q < 0$, т. е. корни знаменателя являются комплексными;

$$\text{IV. } \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}, \text{ где } k=2, 3, 4, \dots$$

Здесь A, B, a, p, q — постоянные действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. не разлагается на действительные линейные множители.

Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена на основании теорем алгебры в виде суммы некоторого количества простейших дробей. Такая замена возможна в случае, если знаменатель заданной рациональной дроби можно разложить на линейные или квадратные множители.

Для интегрирования рациональных дробей нужно уметь раскладывать их на простейшие дроби и интегрировать последние.

Вид простейших дробей определяется корнями знаменателя $g(x)$. Поэтому различают четыре случая интегрирования рациональных дробей.

Случай 1. Знаменатель $g(x)$ интегрируемой рациональной дроби имеет действительные различные корни и раскладывается на линейные неповторяющиеся множители, т. е.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f(x) dx}{(x-a)(x-b) \dots (x-n)}, \quad (11.3)$$

где $a, b, \dots, n$ — действительные числа.

Для вычисления интеграла вида (11.3) после разложения знаменателя подынтегральной дроби на линейные множители заменяем эту дробь суммой простейших дробей, в знаменателях которых будут линейные множители знаменателя подынтегральной дроби, а в числителях неизвестные пока числа $A, B, C, \dots$:

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b) \dots (x-n)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{N}{x-n}. \quad (11.4)$$

Неизвестные числа $A, B, C, \dots$ находятся *методом неопределенных коэффициентов*, который состоит в сравнении коэффициентов числителей при одинаковых степенях независимой переменной. Равенство (11.4) должно быть тождеством, т. е. должно быть справедливым для любого значения независимой переменной, так как в результате сложения элементарных дробей, находящихся в правой части равенства, необходимо получить подынтегральную дробь.

Для определения числителей простейшие дроби приводят к общему знаменателю, а числитель дроби (полученной от сложения

простейших дробей) приравнивают числителю $f(x)$ подынтегральной дроби. Затем приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях независимой переменной x . Таким образом, получается система n уравнений для определения n неизвестных коэффициентов $A, B, C, \dots$.

Неизвестные числа $A, B, C, \dots$ удобно также находить, придавая x надлежащие числовые значения. Сущность этого метода состоит в том, что приравниваемые числители должны оставаться равными при любых значениях x , в частности, при $x=0, 1, 2$, и т. п. Это дает возможность получить систему, связывающую искомые числа $A, B, C, \dots$.

Рассмотрим интегрирование простейших дробей I типа.

Так как дифференциал $d(x-a)=dx$, то

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \ln |x-a| + C.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{(1-x)(x-2)}$.

Решение. Знаменатель дроби представляет собой произведение двух линейных множителей. Представим подынтегральную дробь в виде суммы двух дробей с линейными знаменателями и постоянными числителями:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)(x-2)} &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(1-x)}{(1-x)(x-2)} = \\ &= \frac{Ax - 2A + B - Bx}{(1-x)(x-2)} = \frac{(A-B)x + (B-2A)}{(1-x)(x-2)}, \end{aligned}$$

где A и B неопределенные коэффициенты. Знаменатели дробей одинаковы. Остается выбрать числа A и B такими, чтобы числители также были одинаковы.

а) *Метод неопределенных коэффициентов.*

Числитель дроби $\frac{1}{(1-x)(x-2)}$ не содержит x , а числитель дроби $\frac{(A-B)x + (B-2A)}{(1-x)(x-2)}$ содержит x с коэффициентом $(A-B)$. Следовательно, этот коэффициент должен равняться нулю, т. е. $A-B=0$. Далее, свободный член $B-2A$ рассматриваемой дроби должен равняться свободному члену числителя первой из дробей: $B-2A=1$.

Решая совместно эти уравнения, находим $A=-1$; $B=-1$.

б) *Метод придалания x надлежащих числовых значений.* Приравнивая числители, получаем

$$(A-B)x + B - 2A = 1.$$

Так, например, при $x=0$, имеем

$$B - 2A = 1; \quad (*)$$

при $x=1$, получаем

$$A - B + B - 2A = 1$$

или

$$-A = 1. \quad (**)$$

Из равенства (**) следует, что $A = -1$ и после подстановки этого значения в уравнение (*), находим

$$B = 2A + 1 = -2 + 1 = -1.$$

Таким образом, подынтегральную функцию (вне зависимости от способа определения A и B) можно представить в виде

$$\frac{1}{(1-x)(x-2)} = -\frac{1}{1-x} - \frac{1}{x-2}.$$

Подставляя это выражение вместо подынтегральной функции, имеем

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x-2} \right) dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{2-x} = \\ &= \ln |x-1| + \ln |2-x| + C = \ln |(x-1)(2-x)| + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)} dx$.

Решение. Применим к данному интегралу изложенный выше метод, тогда

$$\frac{4x+11}{(x-1)(2x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+3} = \frac{2Ax+3A+Bx-B}{(x-1)(2x+3)} = \frac{(2A+B)x+(3A-B)}{(x-1)(2x+3)}.$$

Решая систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2A+B &= 4, \\ 3A-B &= 11, \end{aligned} \right\}$$

определяем неизвестные коэффициенты $A=3$; $B=-2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{(4x+11) dx}{(x-1)(2x+3)} &= \int \frac{3dx}{x-1} - \int \frac{2dx}{2x+3} = \\ &= 3 \ln |x-1| - \ln |2x+3| + C = \ln \left| \frac{(x-1)^3}{2x+3} \right| + C. \end{aligned}$$

Случай 2. Знаменатель интегрируемой рациональной дроби раскладывается на линейные повторяющиеся множители, т. е.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f(x) dx}{(x-a)^m (x-b)^n \dots (x-n)^s}, \quad (11.5)$$

где показатели степеней $m, n, \dots, s$ — целые положительные числа. В этом случае подынтегральную дробь разлагают на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{(x-a)^m (x-b)^n \dots (x-n)^s} &= \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{B_1}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{M_1}{x-a} + \\ &+ \frac{A_2}{(x-b)^n} + \frac{B_2}{(x-b)^{n-1}} + \dots + \frac{N_2}{x-b} + \dots + \frac{A_n}{(x-n)^s} + \frac{B_n}{(x-n)^{s-1}} + \dots + \frac{S_n}{x-n}. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Затем простейшие дроби приводят к общему знаменателю, складывают и числитель полученной суммы приравнивают числителю подынтегральной дроби. Для определения $A_1, B_1, \dots, M_1; A_2, B_2, \dots, N_2; \dots; A_n, B_n, \dots, S_n$, как и в случае 1, с помощью

метода неопределенных коэффициентов составляют систему уравнений.

Рассмотрим подробно интегрирование простейшей дроби II типа $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k = 2, 3, 4, \dots$).

Искомый интеграл в каждом из интервалов $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$, в которых знаменатель не обращается в нуль, равен

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^k} dx &= A \int \frac{dx}{(x-a)^k} = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^k} = \\ &= A \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \\ &= -\frac{A}{k-1} \frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C = -\frac{A}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \frac{2-x}{(7-x)^2} dx$.

Решение. Знаменатель дроби $\frac{2-x}{(7-x)^2}$ представляет собой произведение двух одинаковых сомножителей. Представим эту дробь в виде

$$\frac{2-x}{(7-x)^2} = \frac{A}{(7-x)^2} + \frac{B}{7-x} = \frac{A+7B-Bx}{(7-x)^2}.$$

Сравнивая дробь с заданной, получаем $-B = -1$, $A+7B=2$, откуда $A = -5$, $B = 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{2-x}{(7-x)^2} dx &= -5 \int \frac{dx}{(7-x)^2} + \int \frac{dx}{7-x} = -5 \int (7-x)^{-2} dx - \\ &- \int \frac{d(7-x)}{7-x} = 5 \int (7-x)^{-2} d(7-x) - \ln|7-x| = \\ &= 5 \cdot \frac{(7-x)^{-1}}{-1} - \ln|7-x| + C = -\frac{5}{7-x} - \ln|7-x| + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{x^4-6x^3+9x^2}$.

Решение. Разлагаем знаменатель подынтегральной дроби на множители:

$$x^4-6x^3+9x^2 = x^2(x^2-6x+9) = x^2(x-3)^2.$$

а все подынтегральное выражение на элементарные дроби:

$$\frac{1}{x^2(x-3)^2} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-3)^2} + \frac{D}{x-3}.$$

Сравнивая числители подынтегральной дроби и суммы простейших дробей, получаем

$$A(x-3)^2 + Bx(x-3)^2 + Cx^2 + Dx^2(x-3) = 1,$$

или после возведения в степень, умножения и группировки подобных членов

$$(B+D)x^3 + (A-6B+C-3D)x^2 + (9B-6A)x + 9A = 1.$$

Правую часть полученного равенства можно представить в виде

$$0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1.$$

Тогда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных в левой и правой частях равенства, получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} B + D &= 0, \\ A - 6B + C - 3D &= 0, \\ -6A + 9B &= 0, \\ 9A &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему, находим: $A = 1/9$, $B = 2/27$, $C = 1/9$, $D = -2/27$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 - 6x^3 + 9x^2} &= \int \left(\frac{1/9}{x^2} + \frac{2/27}{x} + \frac{1/9}{(x-3)^2} + \frac{-2/27}{x-3} \right) dx = \\ &= \frac{1}{9} \int x^{-2} dx + \frac{2}{27} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{9} \int (x-3)^{-2} d(x-3) - \frac{2}{27} \int \frac{d(x-3)}{x-3} = \\ &= -\frac{1}{9x} + \frac{2}{27} \ln|x| - \frac{1}{9(x-3)} - \frac{2}{27} \ln|x-3| + C = \\ &= -\frac{2x-3}{9x(x-3)} + \frac{2}{27} \ln \left| \frac{x}{x-3} \right| + C. \end{aligned}$$

С л у ч а й 3. Знаменатель интегрируемой рациональной дроби раскладывается на квадратные неповторяющиеся множители, т. е.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f(x) dx}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)}. \quad (11.7)$$

Здесь $a_1x^2 + b_1x + c_1$, $a_2x^2 + b_2x + c_2$, ..., $a_nx^2 + b_nx + c_n$ — квадратные трехчлены, имеющие комплексные корни, которые не разлагаются на множители, содержащие независимую переменную x в первой степени.

Дроби подобного вида разлагаются на простейшие дроби следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2x^2 + b_2x + c_2) \dots (a_nx^2 + b_nx + c_n)} = \\ &= \frac{Ax + B}{a_1x^2 + b_1x + c_1} + \frac{Cx + D}{a_2x^2 + b_2x + c_2} + \dots + \frac{Mx + N}{a_nx^2 + b_nx + c_n}. \quad (11.8) \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты A , B , C , D , ..., M , N находятся как в случаях 1 и 2 методом неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегрирование простейших дробей III типа $\left(\frac{Ax + B}{x^2 + px + q} \right)$.

Квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ можно представить в виде суммы двух квадратов:

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= x^2 + px + p^2/4 + q - p^2/4 = \\ &= (x + p/2)^2 + (q - p^2/4) = (x + p/2)^2 + a^2, \end{aligned}$$

где $a^2 = q - p^2/4$ (что правомерно, так как по условию $p^2/4 - q < 0$, следовательно, при любых значениях x трехчлен $x^2 + px + q > 0$). Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + B - \frac{Ap}{2}}{x^2+px+q} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2} = \\ &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2} \right) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)} dx$.

Решение. Подынтегральную рациональную дробь разлагаем на простейшие дроби:

$$\begin{aligned} \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)} &= \frac{Ax+B}{x^2-2x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \\ &= \frac{(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-2x+5)}{(x^2-2x+5)(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Так как знаменатели в левой и правой частях полученного равенства одинаковы, то обязательно должны быть равны и их числители. Приравняв числители, получаем

$$(Ax+B)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-2x+5) \equiv x^2+2.$$

Выполняя умножение и группируя члены с одинаковыми степенями независимой переменной, имеем

$$(A+C)x^3 + (B-2C+D)x^2 + (A+5C-2D)x + B \equiv x^2+2.$$

Сравнивая коэффициенты с одинаковыми степенями независимой переменной x в правой и левой частях тождества, получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A+C &= 0, \\ B-2C+D &= 1, \\ A+5C-2D &= 0, \\ B+5D &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Решая систему, находим $A = -1/10$, $B = 1$, $C = 1/10$, $D = 1/5$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{Ax+B}{x^2-2x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int \left(\frac{-\frac{1}{10}x+1}{x^2-2x+5} + \frac{\frac{1}{10}x+\frac{1}{5}}{x^2+1} \right) dx = -\frac{1}{10} \int \frac{x-10}{x^2-2x+5} dx + \\ &\quad + \frac{1}{10} \int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x^2+1}. \end{aligned}$$

Найдем интегралы, входящие в последнее равенство.

1. Найдем $\int \frac{x-10}{x^2-2x+5} dx$.

Здесь $x^2-2x+5 = x^2-2x+1-1+5 = (x-1)^2+4$. Применим подстановку $u = x-1$, откуда $x = u+1$ и $dx = du$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{x-10}{x^2-2x+5} dx &= \int \frac{x-10}{(x-1)^2+4} dx = \int \frac{u+1-10}{u^2+4} du = \\ &= \int \frac{u-9}{u^2+4} du = \int \frac{udu}{u^2+4} - 9 \int \frac{du}{u^2+4} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(u^2+4)}{u^2+4} - 9 \operatorname{arctg} \frac{u}{2} = \frac{1}{2} \ln(u^2+4) - 9 \operatorname{arctg} \frac{u}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2-2x+5) - 9 \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C. \end{aligned}$$

2. Найдем $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

Пусть $x^2+1 = t$, тогда $dt = 2xdx$ или $xdx = \frac{dt}{2}$. Тогда

$$\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + C = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + C.$$

3. Найдем $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x$.

Следовательно, искомый интеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2}{(x^2-2x+5)(x^2+1)} dx &= -\frac{1}{20} \ln(x^2-2x+5) + \frac{9}{10} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + \\ &+ \frac{1}{20} \ln(x^2+1) + \frac{1}{5} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

Случай 4. Знаменатель интегрируемой рациональной дроби раскладывается на квадратные повторяющиеся множители, т. е.

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \frac{f(x) dx}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m (a_2x^2+b_2x+c_2)^n \dots (a_nx^2+b_nx+c_n)^s}. \quad (11.9)$$

Подынтегральная дробь в этом случае разлагается на простейшие дроби следующим образом:

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m (a_2x^2+b_2x+c_2)^n \dots (a_nx^2+b_nx+c_n)^s} = \\ &= \frac{A_1x+B_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^m} + \frac{C_1x+D_1}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^{m-1}} + \dots + \frac{M_1x+N_1}{a_1x^2+b_1x+c_1} + \\ &+ \frac{A_2x+B_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^n} + \frac{C_2x+D_2}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^{n-1}} + \dots + \frac{P_2x+Q_2}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \dots \\ &\dots + \frac{A_nx+B_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)^s} + \frac{C_nx+D_n}{(a_nx^2+b_nx+c_n)^{s-1}} + \dots + \frac{R_nx+T_n}{a_nx^2+b_nx+c_n}. \quad (11.10) \end{aligned}$$

Неизвестные коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \dots, P_2, Q_2, \dots, A_n, B_n, C_n, D_n, \dots, R_n, T_n$ находятся методом неопределенных коэффициентов (как и в случаях 1, 2 и 3).

При нахождении интегралов этого типа всегда приходится вычислять интеграл вида

$$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \text{или} \quad \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Интегрируя простейшую дробь IV типа, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^k} dx = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \\ &= \frac{A}{2} \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \\ &= \frac{A}{2} \int (x^2+px+q)^{-k} d(x^2+px+q) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}\right]^k} = \\ &= \frac{A}{2} \frac{(x^2+px+q)^{-k+1}}{-k+1} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^k} = \\ &= -\frac{A}{2(k-1)} \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^k}. \end{aligned}$$

Здесь $a^2 = q - p^2/4$; $k = 2, 3, 4, \dots$

Интеграл

$$I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dx}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^k}$$

с помощью подстановки $x + p/2 = t$, $dx = dt$ приводится к интегралу

$$I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}.$$

Для нахождения этого интеграла вычислим предварительно интеграл

$$I_{k-1} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}}.$$

Положим $u = \frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}$, $dv = dt$, откуда $du = -\frac{(k-1)2t}{(t^2+a^2)^k} dt$, $v = t$.

Тогда

$$\begin{aligned} I_{k-1} &= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1) \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1) \int \frac{(t^2+a^2)-a^2}{(t^2+a^2)^k} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - 2(k-1)a^2 \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \\ &= \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + 2(k-1) I_{k-1} - 2(k-1)a^2 I_k. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$2(k-1)a^2 I_k = \frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + (2k-3) I_{k-1}.$$

или

$$I_k = \frac{t}{a^2(2k-2)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2} \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}. \quad (11.11)$$

Интеграл I_{k-1} того же типа, что и исходный интеграл I_k , но показатель степени знаменателя дроби, входящей в подынтегральное выражение, понизился на единицу.

Рекуррентная формула (11.11) (т. е. формула, с помощью которой вычисление данного интеграла I_k сводится к вычислению интеграла I_{k-1}) называется *формулой приведения*.

Переходя от показателя k к показателю $k-1$, от показателя $k-1$ к показателю $k-2$ и т. д., т. е. применяя формулу приведения $n-1$ раз, получим табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C.$$

После нахождения интеграла I_k остается перейти от переменной t к исходной переменной x .

Пример 6. Найти интеграл $I_2 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Решение. Применяя формулу приведения, имеем

$$I_2 = \frac{x}{a^2 \cdot 2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1.$$

Повторно применяя формулу приведения, находим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{x}{a^2 \cdot 4(x^2+a^2)^2} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{3}{4} I_2 = \\ &= \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \left[\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} I_1 \right] = \\ &= \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^4} I_1. \end{aligned}$$

Третий раз применяя формулу приведения, получаем

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{x}{a^2 \cdot 6(x^2+a^2)^3} + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{5}{6} I_2 = \\ &= \frac{x}{6a^2(x^2+a^2)^3} + \frac{5}{6a^2} \left[\frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(x^2+a^2)} + \frac{3}{8a^4} I_1 \right] = \\ &= \frac{x}{6a^2(x^2+a^2)^3} + \frac{5x}{24a^4(x^2+a^2)^2} + \frac{15x}{48a^6(x^2+a^2)} + \frac{15}{48a^7} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \end{aligned}$$

Таким образом, всякую рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Любую правильную рациональную дробь, в свою очередь, можно представить в виде некоторой суммы простейших дробей. Поэтому интеграл от всякой рациональной дроби выражается через элементарные функции, так как через них выражается интеграл от многочлена и от всякой простейшей дроби.

Пример 7. Найти $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} &= \int \frac{(1+x^2-x^2)dx}{(x^2+1)^3} = \\ &= \int \frac{(x^2+1)dx}{(x^2+1)^3} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3}.\end{aligned}$$

Вычислим последние два интеграла:

$$\begin{aligned}1. \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = \\ &= \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$ находим интегрированием по частям, полагая $u = x$ и $dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$. Тогда $du = dx$,

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{x dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-2} d(x^2+1) = -\frac{1}{2(x^2+1)}.\end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} &= \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C.\end{aligned}$$

2. Интеграл $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3}$ находим интегрированием по частям, полагая $u = x$, $dv = \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$. Тогда

$$\begin{aligned}du &= dx, \quad v = \int \frac{x dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2+1)^3} = \\ &= \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-3} d(x^2+1) = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3} = -\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Последний интеграл был уже вычислен в п. 1, поэтому подставляя в рассматриваемое равенство его значение, имеем

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3} &= -\frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C \right] = \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{8(x^2+1)} + C^*,\end{aligned}$$

где $C^* = C/4$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} - \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x - \\ - \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{x}{8(x^2+1)} + C = \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{5x}{8(x^2+1)} - \frac{x}{4(x^2+1)^2} + C.$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x^3+x}.$

Омс. $\ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right| + C.$

2. $\int \frac{2x^2+5x+5}{x^3+2x^2-x-2}.$

Омс. $\ln \left| \frac{(x-1)^2(x+2)}{x+1} \right| + C.$

3. $\int \frac{x dx}{x^3-1}.$

Омс. $\frac{1}{3} \ln |x-1| - \frac{1}{6} \ln (x^2+x+1) + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$

4. $\int \frac{x^3+x+2}{(x-3)(x-4)} dx.$

Омс. $\frac{1}{2} x^2 + 7x - 32 \ln |x-3| + \\ + 70 \ln |x-4| + C.$

5. $\int \frac{x^2+x+5}{x(x+3)(x-2)} dx.$

Омс. $\ln \frac{(x-2)^{15} \sqrt{(x+3)^{11}} \sqrt{x-2}}{\sqrt[6]{x^5}} + C.$

6. $\int \frac{2x^2-7x+8}{x^4-10x^2+9} dx.$

Омс. $\ln \left| \frac{\sqrt[20]{x^3(x-5)^7}}{(x-4)^6} \sqrt[4]{\left(\frac{x-5}{x-4}\right)^3} \right| + C.$

7. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx.$

Омс. $\ln \left| \frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7} \right| + C.$

8. $\int \frac{2x^5+5x+8}{(x-1)^3(x+2)^2} dx.$

Омс. $-\frac{26x^2+5x-34}{18(x-1)^2(x+2)} + \\ + \frac{13}{27} \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| + C.$

9. $\int \frac{x dx}{(x+1)^2(x+2)}.$

Омс. $\frac{1}{x+1} + \ln \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} + C.$

10. $\int \frac{dx}{x^3-x^2}.$

Омс. $\frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x-1}{x} \right| + C.$

11. $\int \frac{(x^2-2x+1) dx}{(x+1)^2(x+3)^2}.$

Омс. $-\frac{5x+7}{x^2+4x+3} + \ln \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^2 + C.$

12. $\int \frac{(x-1)^2 dx}{x^3+2x^2+x}.$

Омс. $\ln |x| + \frac{4}{x+1} + C.$

13. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^3}.$

Омс. $\ln |x+1| + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + C.$

14. $\int \frac{x dx}{(x^2-x+1)^2}.$

Омс. $\frac{x-2}{3(x^2-x+1)} + \\ + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$

15. $\int \frac{x^4+1}{(x^2+1)^3} dx.$

Омс. $\frac{3}{4} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^2+1)} + \\ + \frac{x}{2(x^2+1)^2} + C.$

16. $\int \frac{x^4+5x^3-7x^2+5}{x^3-x^2+5x-5} dx.$

Омс. $\frac{x^2}{2} + 6x + \frac{1}{3} \ln \frac{(x^2+5)^{10}}{(x-1)^2} + \\ + \frac{95}{3\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}} + C.$

$$17. \int \frac{dx}{1-x^4}.$$

$$\text{Омс. } \ln \left| \sqrt[4]{\frac{1+x}{1-x}} \right| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$18. \int \frac{x dx}{x^3+1}.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{1-x^3}.$$

$$\text{Указание: } 1-x^3 = \\ = (1-x)(1+x+x^2).$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{3} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} \right| + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$20. \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$21. \int \frac{5x^2-12}{(x^2-6x+13)^2} dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \\ + \frac{53}{16} \operatorname{arctg} \frac{x-3}{2} + C.$$

$$22. \int \frac{x^5}{(3+2x^2)^3} dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{16} \left[\ln(3+2x^2) + \right. \\ \left. + \frac{3(9+8x^2)}{2(3+2x^2)^2} \right] + C.$$

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Интегрирование нечетных степеней синуса и косинуса (интегралы вида $\int \sin^{2n+1} x dx$, $\int \cos^{2n+1} x dx$). При интегрировании нечетных степеней синуса или косинуса от нечетной степени этих функций отделяется один множитель первой степени и присоединяется к дифференциалу независимой переменной, а оставшееся выражение заменяется через сходную функцию, которая затем выражается через новую независимую переменную t .

Пример 1. Найти $\int \sin^3 x dx$.

Решение. Используя формулу $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, имеем

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx.$$

Применим подстановку $t = \cos x$, откуда $dt = -\sin x dx$ и $\sin x dx = -dt$. Тогда

$$\int (1 - \cos^2 x) \sin x dx = - \int (1 - t^2) dt = \int t^2 dt - \int dt = \\ = \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt{\sin^5 x}}$.

Решение. Нечетная степень синуса или косинуса может быть умножена на любую степень сходной функции. Тогда

$$\begin{aligned}\int \sin^{-5/2} x \cos^3 x dx &= \int \sin^{-5/2} x (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \\ &= \int \sin^{-5/2} x \cos x dx - \int \sin^{-1/2} x \cos x dx = \\ &= \int \sin^{-5/2} x d(\sin x) - \int \sin^{-1/2} x d(\sin x) = \\ &= -\frac{2}{3} \sin^{-3/2} x - 2 \sin^{1/2} x + C = -\frac{2}{3 \sin x \sqrt{\sin x}} - 2 \sqrt{\sin x} + C.\end{aligned}$$

Интегрирование четных степеней синуса и косинуса (интегралы вида $\int \sin^{2n} x dx$, $\int \cos^{2n} x dx$). Для интегрирования четных целых положительных степеней синуса или косинуса надо квадрат синуса или косинуса заменить по формулам половинного угла:

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x).\end{aligned}$$

При помощи этих формул в подынтегральном выражении вдвое понижаются показатели степени синуса или косинуса и, таким образом, получим члены с $\cos 2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными степенями интегрируются, как указано выше. Четные показатели степеней понижаются далее по приведенным формулам до тех пор, пока не получим члены вида $\int \cos kx dx$, т. е. в конечном итоге данные интегралы сводятся к интегралам от первых степеней косинусов, которые находятся непосредственным интегрированием.

Пример 3. Найти $\int \sin^4 2x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \sin^4 2x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2 \cos 4x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8x \right) dx = \frac{3x}{8} - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{64} \sin 8x + C.\end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \cos^2 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.\end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int \cos^6 x dx$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned}\cos^6 x &= (\cos^2 x)^3 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right)^3 = \\&= \frac{1}{8} (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x) = \\&= \frac{1}{8} \left[1 + 3 \cos 2x + \frac{3}{2} (1 + \cos 4x) + \cos^2 2x \cos 2x\right] = \\&= \frac{1}{8} \left[1 + 3 \cos 2x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 4x + (1 - \sin^2 2x) \cos 2x\right] = \\&= \frac{1}{8} \left[\frac{5}{2} + 4 \cos 2x + \frac{3}{2} \cos 4x - \sin^2 2x \cos 2x\right],\end{aligned}$$

то имеем

$$\begin{aligned}\int \cos^6 x \, dx &= \frac{1}{8} \int \left(\frac{5}{2} + 4 \cos 2x + \frac{3}{2} \cos 4x - \sin^2 2x \cos 2x\right) dx = \\&= \frac{5}{16} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{16} \int \cos 4x \, dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \\&= \frac{5}{16} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.\end{aligned}$$

Интегрирование целых степеней тангенса или котангенса (интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x \, dx$, $\int \operatorname{ctg}^n x \, dx$). При интегрировании любой целой степени тангенса или котангенса необходимо:

1) отделить квадрат тангенса или котангенса, заменяя квадрат тангенса через секанс по формуле

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1,$$

а квадрат котангенса — через косеканс по формуле

$$\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1;$$

2) разложить исходный интеграл на два интеграла и к первому из интегралов применить подстановку

$$z = \operatorname{tg} x \quad \text{или} \quad z = \operatorname{ctg} x,$$

а ко второму — снова применить это же правило, пока не получится первая или вторая степень тангенса или котангенса. Первый интеграл будет табличным, а во втором интеграле (если получен квадрат тангенса или котангенса) заменяем квадраты тригонометрических функций через секанс или косеканс.

Пример 6. Найти $\int \operatorname{tg}^5 x \, dx$.

Решение. Отделяя квадрат тангенса и заменяя его через секанс, имеем:

$$\begin{aligned}\int \operatorname{tg}^5 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \\&= \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg}^3 x \, dx.\end{aligned}$$

Первый из интегралов находим, используя подстановку $z = \operatorname{tg} x$, откуда

$$dz = d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x} = \sec^2 x \, dx.$$

Тогда

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x \, dx = \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + C = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x \sec^2 x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) + \ln |\cos x| = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

Таким образом, данный интеграл

$$\int \operatorname{tg}^5 x \, dx = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C.$$

Интегрирование четных степеней секанса или косеканса (интегралы вида $\int \sec^{2p} x \, dx$, $\int \operatorname{cosec}^{2q} x \, dx$). При интегрировании четной степени секанса или косеканса необходимо квадрат секанса или косеканса присоединить к дифференциалу независимой переменной, а остальную часть подынтегральной функции выразить через тангенс, если отделен квадрат секанса, и через котангенс, если отделен квадрат косеканса. В случае, если отделен квадрат секанса, применяется подстановка $z = \operatorname{tg} x$, и подстановка $z = \operatorname{ctg} x$, когда отделен квадрат косеканса.

Пример 7. Найти $\int \sec^4 x \, dx$.

Решение. Отделяя квадрат секанса, присоединяя его к дифференциалу независимой переменной и выражая оставшееся выражение через тангенс, имеем

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int (\operatorname{tg}^2 x + 1) \sec^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) + \int d(\operatorname{tg} x) = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \, dx$.

Решение. Отделяем квадрат секанса и присоединяем его к дифференциалу аргумента, тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \, dx &= \int \frac{1}{\operatorname{ctg}^{1/2} x} \sec^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^{1/2} x \sec^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^{1/2} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^{3/2} x}{3/2} + C = \frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C. \end{aligned}$$

Интегрирование нечетных степеней секанса или косеканса (интегралы вида $\int \sec^{2p+1} x \, dx$, $\int \operatorname{cosec}^{2q+1} x \, dx$). При интегрировании

нечетных степеней секанса или косеканса необходимо выразить подынтегральное выражение через косинус (для секанса) и через синус (для косеканса). Далее применяется правило интегрирования нечетных степеней синуса или косинуса.

Пример 9. Найти $\int \sec x \, dx$.

Решение. Данную функцию выражаем через косинус и тогда

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x}.$$

Далее интегрируем как косинус нечетной степени. Присоединить множитель к дифференциалу здесь нельзя, поэтому числитель и знаменатель дроби следует умножить на $\cos x$ и знаменатель выразить через сходную функцию:

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x}.$$

Полученный интеграл находим с помощью подстановки $z = \sin x$, откуда $dz = \cos x \, dx$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{\cos x \, dx}{1 - \sin^2 x} = \int \frac{dz}{1 - z^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+z}{1-z} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C. \end{aligned}$$

Пример 10. Найти $\int \sec^3 x \, dx$.

Решение. Данный интеграл можно представить в виде

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \, dx + \int \frac{\cos^2 x}{\cos^3 x} \, dx = \\ &= \int \sin^2 x \cos^{-3} x \, dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \int \sin x \cos^{-3} x \sin x \, dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= - \int \sin x \cos^{-3} x \, d(\cos x) + \int \frac{dx}{\cos x}. \end{aligned}$$

Первый интеграл берем по частям, принимая $\sin x = u$; $\cos^{-3} x \, d(\cos x) = dv$, тогда $du = \cos x \, dx$; $v = \int \cos^{-3} x \, d(\cos x) =$

$= -\frac{1}{2 \cos^2 x}$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} - \int \sin x \cos^{-3} x \, d(\cos x) + \int \frac{dx}{\cos x} &= - \left[\sin x \left(-\frac{1}{2 \cos^2 x} \right) - \right. \\ &- \left. \int -\frac{\cos x \, dx}{2 \cos^2 x} \right] + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos x} = \\ &= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

Интегрирование произведения нечетных степеней секанса (или косеканса) на тангенс (или котангенс) (интегралы вида $\int \sec^{2p+1} x \operatorname{tg}^{2q+1} x dx$, $\int \operatorname{cosec}^{2p+1} x \operatorname{ctg}^{2q+1} x dx$). При интегрировании произведения нечетной степени секанса (или косеканса) на нечетную степень тангенса (или котангенса) необходимо присоединить к дифференциалу независимой переменной по одному множителю первой степени от секанса (или косеканса) и тангенса (или котангенса), а оставшееся выражение заменить через секанс (или косеканс). Затем применяется подстановка $z = \sec x$ (или $z = \operatorname{cosec} x$).

Пример 11. Найти $\int \sec^5 x \operatorname{tg}^3 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sec^5 x \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \sec^4 x \operatorname{tg}^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx = \\ &= \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1) \sec x \operatorname{tg} x dx. \end{aligned}$$

Пусть $z = \sec x$, тогда

$$dz = d(\sec x) = d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{\cos x} \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \operatorname{tg} x dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1) \sec x \operatorname{tg} x dx &= \int z^4 (z^2 - 1) dz = \int (z^6 - z^4) dz = \\ &= \int z^6 dz - \int z^4 dz = \frac{1}{7} z^7 - \frac{1}{5} z^5 + C = \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C. \end{aligned}$$

Интегрирование произведений синуса и косинуса кратных аргументов. Рассмотрим интегралы от произведений синусов и косинусов разных кратных аргументов

$$\int \cos mx \cos nx dx, \int \sin mx \cos nx dx \text{ и } \int \sin mx \sin nx dx \quad (m \neq n).$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos(m+n)x = \cos(mx+nx) = \cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx,$$

$$\cos(m-n)x = \cos(mx-nx) = \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx.$$

Суммируя почленно эти равенства, имеем

$$\cos(m+n)x + \cos(m-n)x = 2 \cos mx \cos nx,$$

откуда

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]. \quad (11.12)$$

Аналогично для синусов суммы и разности двух углов

$$\sin(m+n)x = \sin(mx+nx) = \sin mx \cos nx + \cos mx \sin nx,$$

$$\sin(m-n)x = \sin(mx-nx) = \sin mx \cos nx - \cos mx \sin nx.$$

Суммируя почленно эти равенства, имеем

$$\sin(m+n)x + \sin(m-n)x = 2 \sin mx \cos nx,$$

откуда

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]. \quad (11.13)$$

Вычитая почленно формулы косинусов суммы и разности двух углов, получаем

$$\cos (m+n)x - \cos (m-n)x = -2 \sin mx \sin nx,$$

откуда

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]. \quad (11.14)$$

Подставляя эти формулы в соответствующие данные интегралы, имеем

$$\begin{aligned} \int \cos mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos (m-n)x \, dx = \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \int \cos (m+n)x \, d[(m+n)x] + \\ &+ \frac{1}{2(m-n)} \int \cos (m-n)x \, d[(m-n)x] = \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C; \\ \int \sin mx \cos nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \sin (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin (m-n)x \, dx = \\ &= \frac{1}{2(m+n)} \int \sin (m+n)x \, d[(m+n)x] + \\ &+ \frac{1}{2(m-n)} \int \sin (m-n)x \, d[(m-n)x] = \\ &= -\frac{1}{2(m+n)} \cos (m+n)x - \frac{1}{2(m-n)} \cos (m-n)x + C = \\ &= -\frac{\cos (m+n)x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)x}{2(m-n)} + C; \\ \int \sin mx \sin nx \, dx &= \frac{1}{2} \int [-\cos (m+n)x + \cos (m-n)x] \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \cos (m+n)x \, dx + \frac{1}{2} \int \cos (m-n)x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2(m+n)} \int \cos (m+n)x \, d[(m+n)x] + \\ &+ \frac{1}{2(m-n)} \int \cos (m-n)x \, d[(m-n)x] = \\ &= -\frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + C. \end{aligned}$$

Пример 12. Найти $\int \sin 6x \cos 7x \, dx$.

Решение. Произведение $\sin 6x \cos 7x$ заменяем по формуле (11.13):

$$\begin{aligned}\int \sin 6x \cos 7x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 13x + \sin (-x)] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 13x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 13x dx - \frac{1}{2} \int \sin x dx = \\ &= \frac{1}{26} \int \sin 13x d(13x) - \frac{1}{2} (-\cos x) = -\frac{1}{26} \cos 13x + \frac{1}{2} \cos x + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos x - \frac{1}{13} \cos 13x \right) + C.\end{aligned}$$

Пример 13. Найти $\int \cos 2x \cos 3x \cos (8x + 1) dx$.

Решение. Применяя формулу (11.12), находим

$$\begin{aligned}\int \cos 2x \cos 3x \cos (8x + 1) dx &= \frac{1}{2} \int [\cos x + \cos 5x] \cos (8x + 1) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos x \cos (8x + 1) dx + \frac{1}{2} \int \cos 5x \cos (8x + 1) dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int [\cos (9x + 1) + \cos (7x + 1)] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int [\cos (13x + 1) + \cos (3x + 1)] dx = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1}{9} \int \cos (9x + 1) d(9x + 1) + \frac{1}{7} \int \cos (7x + 1) d(7x + 1) \right] + \\ &+ \frac{1}{4} \left[\frac{1}{13} \int \cos (13x + 1) d(13x + 1) + \frac{1}{3} \int \cos (3x + 1) d(3x + 1) \right] = \\ &= \frac{1}{36} \sin (9x + 1) + \frac{1}{28} \sin (7x + 1) + \frac{1}{52} \sin (13x + 1) + \frac{1}{12} \sin (3x + 1) + C.\end{aligned}$$

Интегрирование произведения целых степеней синуса и косинуса (интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$). Рассмотрим четыре случая интеграла вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где $m \neq n$ — целые числа.

Случай 1. Показатель степени синуса $m = 2p + 1$ — нечетное положительное число.

Тогда функция

$$\sin^m x = \sin^{2p+1} x = \sin^{2p} x \sin x = (\sin^2 x)^p \sin x = (1 - \cos^2 x)^p \sin x;$$

подынтегральное выражение

$$\sin^m x \cos^n x dx = (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx.$$

Для нахождения данного интеграла применяем подстановку $z = \cos x$, откуда $dz = -\sin x dx$ или $\sin x dx = -dz$. Тогда интеграл

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int (1 - \cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx = - \int (1 - z^2)^p z^n dz$$

сводится к интегралу от суммы степенных функций.

Пример 14. Найти $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

Решение. Преобразуем подынтегральную функцию

$$\begin{aligned}\sin^5 x \cos^2 x &= \sin^4 x \sin x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^2 x = \\ &= (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x = (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^2 x \sin x = \\ &= (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x.\end{aligned}$$

Положим $z = \cos x$, откуда $dz = -\sin x dx$. Тогда

$$\begin{aligned}\int (\cos^2 x - 2\cos^4 x + \cos^6 x) \sin x dx &= -\int (z^2 - 2z^4 + z^6) dz = \\ &= -\frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + C = -\frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{2}{5} \cos^5 x - \frac{1}{7} \cos^7 x + C.\end{aligned}$$

С л у ч а й 2. Показатель степени косинуса $n = 2q + 1$ — нечетное положительное число. В этом случае функция

$$\cos^n x = \cos^{2q+1} x = \cos^{2q} x \cos x = (\cos^2 x)^q \cos x = (1 - \sin^2 x)^q \cos x;$$

подынтегральное выражение

$$\sin^m x \cos^n x dx = \sin^m x (1 - \sin^2 x)^q \cos x dx.$$

Для вычисления интеграла применяем подстановку $z = \sin x$, откуда $dz = \cos x dx$. Тогда

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (1 - \sin^2 x)^q \cos x dx = \int z^m (1 - z^2)^q dz$$

сводится к интегралу от суммы степенных функций.

Пример 15. Найти $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.

Решение. Выделим у подынтегральной функции, имеющей нечетную степень, первую степень, тогда

$$\begin{aligned}\sin^4 x \cos^3 x &= \sin^4 x \cos^2 x \cos x = \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x = \\ &= (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x.\end{aligned}$$

Применяя подстановку $z = \sin x$, имеем

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x \cos^3 x dx &= \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \cos x dx = \int (z^4 - z^6) dz = \\ &= \int z^4 dz - \int z^6 dz = \frac{1}{5} z^5 - \frac{1}{7} z^7 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C.\end{aligned}$$

С л у ч а й 3. Показатели степени m и n — неотрицательные четные числа, т. е. $m = 2p$, $n = 2q$. Формулы тригонометрии

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x; \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

приводят интеграл к случаю 1 или 2, так как, используя их, получим

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие $\cos 2x$ в нечетных и четных степенях. Члены с нечетными

степенями интегрируются как в случае 2. Члены с четными степенями показателей следует понижать по формуле

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4x$$

до тех пор, пока не получится интеграл вида $\int \cos kx dx$.

Пример 16. Найти $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)^2 \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \right) dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x)(1 + \cos 2x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \int (1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x \cos 4x) dx = \\ &= \frac{1}{16} \left[\int dx + \int \cos 2x dx - \int \cos 4x dx - \int \frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 6x) dx \right] = \\ &= \frac{1}{16} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{12} \sin 6x \right) + C = \\ &= \frac{1}{16} x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{192} \sin 6x + C. \end{aligned}$$

Случай 4. Сумма $m+n$ показателей степени синуса и косинуса в интеграле $\int \sin^m x \cos^n x dx$ — четное отрицательное число, т. е. $m+n = -2k$ (где $k > 0$).

В этом случае любая из подстановок

$$\operatorname{tg} x = z \quad (11.15)$$

или

$$\operatorname{ctg} x = z \quad (11.16)$$

преобразует подынтегральную функцию в многочлен.

Из подстановки (11.15) следует

$$dx = \frac{dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad (11.17)$$

тогда $dz = \sec^2 x dx$, откуда также

$$dx = \frac{dz}{\sec^2 x} = \frac{dz}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Используя подстановку (11.16), аналогично имеем

$$dx = -\frac{dz}{1+z^2}, \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \cos x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}. \quad (11.18)$$

Пример 17. Найти $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx$.

Решение. В этом случае $n=4$, $m=-6$, т. е. сумма показателей $m+n=-2$ является четным отрицательным числом. В чис-

лителе находится косинус, поэтому применяем подстановку $\operatorname{ctg} x = z$.

Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^4 x}{\sin^6 x} dx &= - \int \frac{\frac{z^4}{\sqrt{(1+z^2)^4}}}{\frac{1}{\sqrt{(1+z^2)^6}}} \frac{dz}{1+z^2} = - \int z^4 dz = \\ &= -\frac{1}{5} z^5 + C = -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C.\end{aligned}$$

Упражнения

1. $\int \cos^5 x dx.$

Омс. $\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$

2. $\int \sin^7 x dx.$

Омс. $-\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x +$
 $+\frac{1}{7} \cos^7 x + C.$

3. $\int \cos^9 x dx.$

Омс. $\sin x - \frac{4}{3} \sin^3 x + \frac{6}{5} \sin^5 x -$
 $-\frac{4}{7} \sin^7 x + \frac{1}{9} \sin^9 x + C.$

4. $\int \sin^2 x dx.$

Омс. $\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

5. $\int \cos^4 x dx.$

Омс. $\frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

6. $\int \sin^4 x dx$

Омс. $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$

7. $\int \sin^6 x dx.$

Омс. $\frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{3}{64} \sin 4x +$
 $+\frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$

8. $\int \operatorname{tg}^4 x dx.$

Омс. $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C.$

9. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx.$

Омс. $-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x +$
 $+\ln |\sin x| + C.$

10. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

Омс. $\frac{1}{7} \operatorname{tg}^7 x - \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x -$
 $-\operatorname{tg} x + x + C.$

11. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

Омс. $-\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x - \ln |\sin x| + C.$

12. $\int \operatorname{tg}^7 x dx.$

Омс. $\frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x - \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x +$
 $+\ln |\cos x| + C.$

13. $\int \sec^4 x dx.$

Омс. $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$

14. $\int \operatorname{cosec}^4 x dx.$

Омс. $-\operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.$

15. $\int \sec^6 x dx.$

Омс. $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$

16. $\int \operatorname{cosec}^6 x dx.$

Омс. $-\operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x -$
 $-\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + C.$

17. $\int \operatorname{tg}^{\frac{3}{2}} x \sec^4 x dx.$

Омс. $2 \sqrt{\operatorname{tg} x} \left(\frac{1}{5} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{9} \operatorname{tg}^4 x \right) + C.$

18. $\int \operatorname{cosec}^5 x dx.$

Омс. $\frac{1}{16} \left(-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \right.$
 $\left. + 6 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + 2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} \right) + C.$

$$19. \int \frac{\operatorname{tg}^3 x \, dx}{\sec x}.$$

$$\text{Омс. } \cos x + \sec x + C.$$

$$20. \int \frac{\sin^7 x}{\cos^{13} x}.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{8} \operatorname{tg}^8 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^{10} x +$$

$$+ \frac{1}{12} \operatorname{tg}^{12} x + C.$$

$$21. \int \cos 3x \cos x \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C.$$

$$22. \int \sin 5x \sin \frac{x}{2} \, dx.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{11} \sin \frac{11}{2} x + \frac{1}{9} \sin \frac{9}{2} x + C.$$

$$23. \int \sin \frac{3}{4} x \cos \frac{x}{4} \, dx.$$

$$\text{Омс. } -\cos \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cos x + C.$$

$$24. \int \sin x \cos 2x \cos 3x \, dx.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{16} \cos 4x -$$

$$-\frac{1}{24} \cos 6x + C.$$

$$25. \int \sin 2x \sin 5x \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C.$$

$$26. \int \sin^4 x \cos^7 x \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{3}{7} \sin^7 x + \frac{1}{3} \sin^9 x -$$

$$-\frac{1}{11} \sin^{11} x + C.$$

$$27. \int \sin^7 x \cos^6 x \, dx.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{7} \cos^7 x + \frac{1}{3} \cos^9 x -$$

$$-\frac{3}{11} \cos^{11} x + \frac{1}{13} \cos^{13} x + C.$$

$$28. \int \sin^2 x \cos^3 x \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$$29. \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

$$30. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx.$$

$$\text{Омс. } \sec x + \cos x + C.$$

$$31. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x}.$$

$$\text{Омс. } -\frac{2 \cos 2x}{\sin^2 2x} + 2 \ln |\operatorname{tg} x| + C.$$

$$33. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{6} \operatorname{tg}^6 x + C.$$

$$34. \int \sqrt{\frac{\sin x}{\cos^9 x}} \, dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{2}{3} \operatorname{tg} x \sqrt{\operatorname{tg} x} +$$

$$+ \frac{2}{7} \operatorname{tg}^3 x \sqrt{\operatorname{tg} x} + C.$$

$$35. \int \sqrt[3]{\frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}} \, dx.$$

$$\text{Омс. } -\frac{3}{5} \operatorname{ctg} x \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + C.$$

$$36. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 3 \ln |\operatorname{tg} x| +$$

$$+ \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ, РАЦИОНАЛЬНО ЗАВИСЯЩИХ ОТ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим интегралы от рациональных тригонометрических функций вида

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx. \quad (11.19)$$

Символ $R(\sin x, \cos x)$ означает, что над синусом и косинусом производятся рациональные операции: сложение, вычитание, умноже-

ние на постоянные величины, возведение в целые положительные и отрицательные степени, деление.

Интегралы вида (11.19) приводятся к интегралу от рациональной алгебраической функции с помощью подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z \quad (-\pi < x < \pi), \quad (11.20)$$

называемой *универсальной тригонометрической подстановкой*. Такое название объясняется тем, что эта подстановка во всех случаях приводит функцию $R(\sin x, \cos x)$ к рациональной алгебраической функции.

Из тригонометрии известно, что все тригонометрические функции выражаются рационально через $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а именно

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{1} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}}{1 + \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right)^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \\ \cos x &= \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \\ &= \frac{1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Используя универсальную тригонометрическую подстановку (11.20), выразим $\sin x$ и $\cos x$ рационально через новую переменную z :

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}; \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}. \quad (11.21)$$

Из равенства (11.21) следует, что $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$ ($-\pi < x < \pi$), откуда

$$x = 2 \operatorname{arctg} z \text{ или } dx = \frac{2dz}{1+z^2}. \quad (11.22)$$

Рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, поэтому, подставляя выражения (11.21) и (11.22) в интеграл (11.19), получим интеграл от рациональной алгебраической функции:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) \frac{2dz}{1+z^2}.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$.

Решение. Воспользуемся универсальной тригонометрической подстановкой $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$, откуда $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^3 x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{8z^3}{(1+z^2)^3}} = \frac{1}{4} \int \frac{(1+z^2)^2}{z^3} dz = \frac{1}{4} \int \frac{1+2z^2+z^4}{z^3} dz = \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z} + z \right) dz = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z^2} + 2 \ln |z| + \frac{z^2}{2} \right) + C = \\ &= -\frac{1}{8} \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C = \\ &= -\frac{1}{8} \operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{5-3 \cos x}$.

Решение. Пусть $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = z$. Тогда $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} z$ и $x = 2 \operatorname{arctg} z$, откуда $dx = \frac{2dz}{1+z^2}$; $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5-3 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-3 \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2dz}{5+5z^2-3+3z^2} = \\ &= \int \frac{dz}{4z^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2z + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

Иногда универсальная тригонометрическая подстановка приводит к сложным вычислениям, поэтому используют другие подстановки, которые в частных случаях быстрее приводят к цели. Рассмотрим эти случаи специальных упрощенных подстановок.

1. Интеграл вида $\int R(\sin x) \cos x dx$ подстановкой

$$z = \sin x, \quad dz = \cos x dx$$

приводится к интегралу от рациональной функции вида $\int R(z) dz$.

2. Интеграл вида $\int R(\cos x) \sin x \, dx$ подстановкой

$$z = \cos x, \quad dz = -\sin x \, dx$$

приводится к интегралу вида $\int R(z) \, dz$.

3. Интеграл вида $\int R(\operatorname{tg} x) \, dx$ подстановкой

$$z = \operatorname{tg} x, \quad x = \operatorname{arctg} z, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}$$

приводится к интегралу вида $\int R(z) \frac{dz}{1+z^2}$.

4. Интеграл вида $\int R(\sin^{2p} x, \cos^{2q} x) \, dx$, в котором подынтегральная функция зависит только от четных степеней $\sin x$ и $\cos x$, с помощью подстановки

$$\operatorname{tg} x = z \quad (\text{или } x = \operatorname{arctg} z)$$

приводится к интегралу от рациональной функции, так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через $\operatorname{tg} x$, а именно,

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+z^2}, \quad \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{z^2}{1+z^2}, \quad dx = \frac{dz}{1+z^2}.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \, dx$.

Решение. Применяем упрощенную подстановку $z = \sin x$, откуда $dz = \cos x \, dx$.

Так как

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

то

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - z^2}; \quad \cos^2 x = 1 - z^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^5 x}{\sin^4 x} \, dx &= \int \frac{\cos^4 x \cos x}{\sin^4 x} \, dx = \int \frac{(1-z^2)^2 dz}{z^4} = \\ &= \int \frac{1-2z^2+z^4}{z^4} \, dz = \int \left(\frac{1}{z^4} - \frac{2}{z^2} + 1 \right) dz = \\ &= -\frac{1}{3z^3} + \frac{2}{z} + z + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{2}{\sin x} + \sin x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} \, dx$.

Решение. Интеграл приводится к виду $\int R(\cos x) \sin x \, dx$, так как

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x} \, dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x \, dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} \sin x \, dx.$$

Применяем упрощенную подстановку $z = \cos x$, откуда

$$dz = d(\cos x) = -\sin x \, dx \quad \text{и} \quad -dz = \sin x \, dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - z^2}{1 + z} (-dz) = \int \frac{z^2 - 1}{z + 1} dz = \int \frac{(z - 1)(z + 1)}{z + 1} dz = \\ &= \int (z - 1) dz = \frac{z^2}{2} - z + C = \frac{1}{2} \cos^2 x - \cos x + C.\end{aligned}$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$.

Решение. Применяем упрощенную подстановку $z = \operatorname{tg} x$. Тогда

$$\sin^2 x = \frac{z^2}{1 + z^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + z^2}, \quad dz = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Следовательно, искомый интеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{\operatorname{tg}^4 x \cos^6 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^4 x \cos^4 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^4 x (\cos^2 x)^2} = \int \frac{dz}{z^4 \frac{1}{(1 + z^2)^2}} = \\ &= \int \frac{(1 + z^2)^2}{z^4} dz = \int (z^{-4} + 2z^{-2} + 1) dz = \\ &= \frac{z^{-3}}{-3} + 2 \frac{z^{-1}}{-1} + z + C = z - \frac{2}{z} - \frac{1}{3z^3} + C = \\ &= \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + C.\end{aligned}$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$. Указание. $\cos x =$

$$= \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

Омс. $\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} +$
 $+ \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.$

2. $\int \frac{\sin 2x dx}{1 + \sin 2x}.$

Омс. $x + \frac{1}{1 + \operatorname{tg} x} + C.$

3. $\int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}.$

Омс. $\frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$

4. $\int \frac{dx}{2 + 3 \cos x}.$

Омс. $\frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \sqrt{5}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \sqrt{5}} \right| + C.$

5. $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x}.$

Омс. $x - \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

6. $\int \frac{\operatorname{ctg} x dx}{1 - \sin x - \cos x}.$

Омс. $\frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

7. $\int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x}.$

Омс. $\frac{\sqrt{5}}{5} \ln \left| \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{5}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{5}} \right| + C.$

8. $\int \frac{(1 + \sin x) dx}{(1 + \cos x) \sin x}.$

Омс. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} +$
 $+ \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

9. $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx.$

Омс. $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

Интегрирование функций вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$. Интегрирование функций указанного вида производится с помощью тригонометрических подстановок, которые приводят к интегрированию рациональных функций.

а) При нахождении интегралов вида $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ применяется подстановка $x = a \sin z$.

Найдем, например, интеграл $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Применим подстановку $x = a \sin z$, откуда $dx = a \cos z dz$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} a \cos z dz = \\ &= a^2 \int \sqrt{1 - \sin^2 z} \cos z dz = a^2 \int \sqrt{\cos^2 z} \cos z dz = \\ &= a^2 \int \cos^2 z dz = a^2 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2z \right) dz = \\ &= \frac{a^2}{2} \int dz + \frac{a^2}{2} \int \cos 2z dz = \frac{a^2}{2} z + \frac{a^2}{4} \int \cos 2z d(2z) = \\ &= \frac{a^2}{2} z + \frac{a^2}{4} \sin 2z + C = \frac{a^2}{2} \left(z + \frac{1}{2} \sin 2z \right) + C. \end{aligned}$$

Далее заменяем переменную z через исходную независимую переменную x :

$$z = \arcsin \frac{x}{a}.$$

Если подынтегральная функция имеет вид $\sqrt{q + px - x^2}$, то, выделяя полный квадрат суммы или разности из заданного квадратного трехчлена и используя подстановку, можно корень из квадратного трехчлена привести к виду $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Пример 1. Найти $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

Решение. Пусть $x = 2 \sin z$, тогда $dx = d(2 \sin z) = 2 \cos z dz$ и $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 z} = \sqrt{4(1 - \sin^2 z)} = 2 \sqrt{\cos^2 z} = 2 \cos z$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx &= \int 4 \sin^2 z \cdot 2 \cos z \cdot 2 \cos z dz = 16 \int \sin^2 z \cos^2 z dz = \\ &= 16 \int \left(\frac{1}{2} \sin 2z \right)^2 dz = 4 \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4z \right) dz = 2 \int dz - 2 \int \cos 4z dz = \\ &= 2z - \frac{1}{2} \int \cos 4z d(4z) = 2z - \frac{1}{2} \sin 4z + C. \end{aligned}$$

Заменим переменную z через исходную переменную x . Поскольку $\sin z = \frac{x}{2}$, то $z = \arcsin \frac{x}{2}$. Кроме того, $\cos z = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}$. Так как

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2},$$

то

$$\begin{aligned}\cos 2z &= \sqrt{1 - \sin^2 2z} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}(4 - x^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 - 4x^2 + x^4} = \frac{1}{2} \sqrt{(2 - x^2)^2} = \frac{1}{2} (2 - x^2).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\sin 4z &= 2 \sin 2z \cos 2z = 2 \cdot \frac{x}{2} \sqrt{4 - x^2} \cdot \frac{1}{2} (2 - x^2) = \\ &= \frac{x}{2} (2 - x^2) \sqrt{4 - x^2}.\end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{1}{4} x (2 - x^2) \sqrt{4 - x^2} + C.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}}$.

Решение. Данный интеграл можно представить в виде

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4 - x^2)^3}} = \int \frac{dx}{(4 - x^2) \sqrt{4 - x^2}}.$$

Здесь $a = 2$. Применим подстановку $x = 2 \sin z$ или $\sin z = \frac{x}{2}$, откуда $dx = 2 \cos z dz$. Тогда

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{(4 - x^2) \sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2 \cos z dz}{(4 - 4 \sin^2 z) \sqrt{4 - 4 \sin^2 z}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos z dz}{(1 - \sin^2 z) \sqrt{4(1 - \sin^2 z)}} = \frac{1}{4} \int \frac{\cos z dz}{\cos^2 z \sqrt{\cos^2 z}} = \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\cos z \cos z} = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} z + C = \frac{1}{4} \frac{\sin z}{\cos z} + C = \frac{1}{4} \frac{\sin z}{\sqrt{1 - \sin^2 z}} + C = \\ &= \frac{1}{4} \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} + C = \frac{1}{4} \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} + C.\end{aligned}$$

б) При нахождении интегралов вида $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$ применяется подстановка $x = a \operatorname{tg} z$.

Найдем, например, интеграл $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$. Применим подстановку $x = a \operatorname{tg} z$, откуда $dx = a \sec^2 z dz$. Тогда

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int \sqrt{a^2 \operatorname{tg}^2 z + a^2} a \sec^2 z dz = \\ &= a^2 \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} \sec^2 z dz = a^2 \int \sqrt{\sec^2 z} \sec^2 z dz = a^2 \int \sec^3 z dz.\end{aligned}$$

Вычислим отдельно полученный интеграл:

$$\int \sec^3 z dz = \int \frac{\cos z dz}{\cos^4 z} = \int \frac{\cos z dz}{(1 - \sin^2 z)^2}.$$

Затем воспользуемся подстановкой $t = \sin z$, откуда $dt = \cos z \, dz$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos z \, dz}{(1 - \sin^2 z)^2} &= \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2} = \int \frac{dt}{(1+t)^2(1-t)^2} = \\ &= \int \left[\frac{A}{(1+t)^2} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1-t)^2} + \frac{D}{1-t} \right] dt. \end{aligned}$$

Складывая простейшие дроби и приравнявая числитель их суммы числителю подынтегральной функции, имеем

$$A(1-t)^2 + B(1+t)(1-t)^2 + C(1+t)^2 + D(1+t)^2(1-t) = 1$$

или (после умножения и группировки подобных членов)

$$(B-D)t^3 + (A-B+C-D)t^2 + (-2A-B+2C+D)t + A+B+C+D = 1.$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты в обеих частях равенства, получим систему

$$\left. \begin{aligned} B-D &= 0, \\ A-B+C-D &= 0, \\ -2A-B+2C+D &= 0, \\ A+B+C+D &= 1, \end{aligned} \right\}$$

решение которой $A = B = C = D = \frac{1}{4}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{A}{(1+t)^2} + \frac{B}{1+t} + \frac{C}{(1-t)^2} + \frac{D}{1-t} \right] dt &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t+1} + \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1-t)^2} + \frac{1}{4} \int \frac{dt}{1-t} = \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{1+t} + \ln |t+1| + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{1-t} - \ln |1-t| \right] + C = \frac{1}{4} \left[\frac{2t}{1-t^2} + \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right] + C = \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2 \sin z}{1 - \sin^2 z} + \ln \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right] + C = \frac{1}{4} \left[\frac{2 \sin z}{\cos^2 z} + \ln \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right] + C. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$a^2 \int \sec^3 z \, dz = \frac{a^2}{4} \left[\frac{2 \sin z}{\cos^2 z} + \ln \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right] + C.$$

Так как $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$, то, подставляя вместо z исходную переменную x , получим данный интеграл.

Если под интегралом имеется квадратный корень из квадратного трехчлена $\sqrt{x^2 + px + q}$, то выделяя полный квадрат суммы или разности и применяя подстановку $x + \frac{p}{2} = z$, приводим этот интеграл к интегралу вида $\int \sqrt{z^2 + a^2} \, dz$.

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}$.

Решение. Пусть $x = 4 \operatorname{tg} z$, откуда $dx = 4 \sec^2 z \, dz$. Тогда

$$\sqrt{16 + x^2} = \sqrt{16 + 16 \operatorname{tg}^2 z} = 4 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z} = 4 \sec z$$

и

$$\sqrt{(16 + x^2)^3} = 4^3 \sec^3 z.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}} = \int \frac{4 \sec^2 z \, dz}{4^3 \sec^3 z} = \frac{1}{16} \int \frac{dz}{\sec z} = \frac{1}{16} \int \cos z \, dz = \frac{1}{16} \sin z + C.$$

Заменим независимую переменную z на исходную независимую переменную x . Так как $\operatorname{tg} z = x/4$, то

$$\sin z = \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 z}} = \frac{x/4}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{16}}} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(16 + x^2)^3}} = \frac{x}{16 \sqrt{16 + x^2}} + C.$$

в) При нахождении интегралов вида $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \, dx$ применяется подстановка $x = a \sec z$.

Найдем, например, интеграл $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$. Применим подстановку $x = a \sec z$, откуда $dx = a \sec z \operatorname{tg} z \, dz$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx &= \int \sqrt{a^2 \sec^2 z - a^2} \, a \sec z \operatorname{tg} z \, dz = \\ &= a^2 \int \sqrt{\sec^2 z - 1} \sec z \operatorname{tg} z \, dz = a^2 \int \sqrt{\operatorname{tg}^2 z} \sec z \, dz = a^2 \int \sec z \operatorname{tg}^2 z \, dz, \end{aligned}$$

т. е. данный интеграл сводится к интегралу, в котором нет иррациональных выражений.

Если подынтегральная функция имеет вид $\sqrt{x^2 + px + q}$, то, выделяя из квадратного трехчлена полный квадрат суммы или разности и применяя подстановку, данный интеграл можно свести к виду $\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx$ или $\int \sqrt{x^2 + a^2} \, dx$. Первый из интегралов находится с помощью подстановки $x = a \sec z$, а второй с помощью подстановки $x = a \operatorname{tg} z$.

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 9}}$.

Решение. Пусть $x = 3 \sec z = \frac{3}{\cos z}$. Тогда

$$\sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 \sec^2 z - 9} = 3 \sqrt{\sec^2 z - 1} = 3 \sqrt{\operatorname{tg}^2 z} = 3 \operatorname{tg} z;$$

$$dx = \frac{3 \sin z}{\cos^2 z} \, dz = 3 \operatorname{tg} z \sec z \, dz.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3} \int \frac{\operatorname{tg} z \sec z dz}{\sec z \operatorname{tg} z} = \frac{1}{3} \int dz = \frac{1}{3} z + C.$$

Поскольку $\sec z = \frac{x}{3}$, то $z = \operatorname{arcsec} \frac{x}{3}$, или $z = \arccos \frac{3}{x}$.

Окончательно имеем

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{3} z + C = \frac{1}{3} \arccos \frac{3}{x} + C.$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+2}}$.

Решение. Знаменатель подынтегральной функции представим в виде

$$(x+1) \sqrt{x^2+2x+2} = (x+1) \sqrt{(x+1)^2+1}.$$

Пусть $x+1 = \operatorname{tg} z$, $z = \operatorname{arctg} (x+1)$, тогда $x = \operatorname{tg} z - 1$ и $dx = \sec^2 z dz$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{(x+1)^2+1}} &= \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg} z \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}} = \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg} z \sqrt{\sec^2 z}} = \\ &= \int \frac{\sec^2 z dz}{\operatorname{tg} z \sec z} = \int \frac{\sec z dz}{\operatorname{tg} z} = \int \frac{dz}{\sin z} = \int \operatorname{cosec} z dz = \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{z}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{arctg} (x+1)}{2} + \frac{\pi}{4} \right] \right| + C. \end{aligned}$$

Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного аргумента. Рассмотрим интеграл вида $\int R(x, x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots, x^\omega) dx$, где $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$ — дробные рациональные числа; R — рациональная функция от аргументов $x, x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots, x^\omega$. Запись $R(x, x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots, x^\omega)$ означает, что над величинами $x, x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots, x^\omega$ производятся лишь рациональные операции: четыре алгебраических действия и действие возведения в целую степень (как положительную, так и отрицательную). Вообще же под интегралом находится иррациональная функция. Пусть n — общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$. Сделаем подстановку $x = z^n$, $dx = nz^{n-1} dz$.

Тогда любая дробная степень x выразится через целую степень z . Следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию нового аргумента z .

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^2-1}} dx$.

Решение. Общий знаменатель дробей $1/3, 2/3$ и $1/2$ равен 6. Поэтому положим $x = z^6$, $dx = 6z^5 dz$. Тогда, так как $x^{1/3} = z^2$, $x^{2/3} = z^4$, $x^{1/2} = z^3$, то

$$\int \frac{x^{1/3}}{x^{2/3} - x^{1/2}} dx = \int \frac{z^2}{z^4 - z^3} \cdot 6z^5 dz = 6 \int \frac{z^7}{z^4 - z^3} dz = 6 \int \frac{z^4}{z-1} dz.$$

Выделяя целую часть и учитывая, что $z = \sqrt[6]{x}$, имеем

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{z^4}{z-1} dz &= 6 \int \left(z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z-1} \right) dz = \\ &= 6 \left(\frac{z^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} + z + \ln |z-1| \right) + C = \\ &= 6 \left(\frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln |\sqrt[6]{x}-1| \right) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейной функции аргумента. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R \left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\beta, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\gamma, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\omega \right] dx.$$

С помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

где n —общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega$, данный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 7. Найти $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Решение. Данный интеграл можно представить в виде

$$\int \frac{(x+4)^{1/2}}{x} dx,$$

следовательно, это интеграл рассматриваемого типа.

Пусть $x+4=z^2$, откуда $x=z^2-4$ и $dx=2z dz$. Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+4)^{1/2}}{x} dx &= 2 \int \frac{z^2}{z^2-4} dz = 2 \int \left(1 + \frac{4}{z^2-4} \right) dz = \\ &= 2 \int dz + 8 \int \frac{dz}{z^2-4} = 2z + 2 \ln \left| \frac{z-2}{z+2} \right| + C = \\ &= 2 \sqrt{x+4} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример 8. Найти $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.

Решение. Данный интеграл можно представить в виде

$$I = \int \frac{x dx}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Здесь показатели степеней $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$ имеют общий знаменатель $n=6$. Следовательно, применим подстановку

$$1+x=z^6,$$

откуда

$$x=z^6-1 \text{ и } dx=6z^5 dz.$$

Подставляя эти значения в подынтегральное выражение, имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{(z^6-1)6z^5 dz}{z^2-z^3} &= -6 \int \frac{(z^{11}-z^5) dz}{z^3-z^2} = -6 \int \frac{z^9-z^3}{z-1} dz = \\ &= -6 \int (z^8+z^7+z^6+z^5+z^4+z^3) dz = -6 \left(\frac{z^9}{9} + \frac{z^8}{8} + \frac{z^7}{7} + \frac{z^6}{6} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{z^5}{5} + \frac{z^4}{4} \right) + C = -6z^4 \left(\frac{z^5}{9} + \frac{z^4}{8} + \frac{z^3}{7} + \frac{z^2}{6} + \frac{z}{5} + \frac{1}{4} \right) + C = \\ &= -6 \left[(1+x) \sqrt{1+x} + (1+x) \sqrt[3]{1+x} + (1+x) \sqrt[6]{1+x} + 1+x + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[6]{(1+x)^5} + \sqrt[3]{(1+x)^2} \right] + C = -6 \left[(1+x) (\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt[6]{1+x} + 1) + \sqrt[6]{(1+x)^5} + \sqrt[3]{(1+x)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

Омс. $\frac{2}{3}(x^2-8)\sqrt{4+x^2}+C.$

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$

Омс. $-\arcsin \frac{1}{x}+C.$

3. $\int \frac{x dx}{(4-x^2)^5}.$

Омс. $\frac{1}{3(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}+C.$

4. $\int \frac{dx}{x(x^2+9)}.$

Омс. $\frac{1}{9} \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} \right| + C.$

5. $\int \sqrt{5+4x-x^2} dx.$

Омс. $\frac{9}{2} \left[\arcsin \frac{x-2}{3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{9}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2} \right] + C.$

6. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} dx.$

Омс. $6 \left(\frac{1}{5} \sqrt[6]{x^5} + \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \sqrt{x} + \frac{1}{2} \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \right. \\ \left. + \ln \left| \sqrt[6]{x}-1 \right| \right) + C.$

7. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})} dx.$

Омс. $\ln \frac{x}{(\sqrt[6]{x}+1)^6} + C.$

8. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1} dx.$

Омс. $\frac{4}{3} \left[\sqrt[4]{x^3} - \ln(\sqrt[4]{x^3}+1) \right] + C.$

9. $\int \frac{x\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}} dx.$

Омс. $\frac{2}{27} x^2 \sqrt[4]{x} - \frac{2}{13} x \sqrt[12]{x} + C.$

10. $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x} dx.$

Омс. $2\sqrt{2x-3} - \\ - \frac{6}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2x-3}{3}} + C.$

11. $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x^3} dx.$

Омс. $\frac{1}{10} \frac{(x-5)\sqrt{x-5}}{x^2} - \frac{1}{20} \frac{\sqrt{x-5}}{x} + \\ + \frac{1}{20\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-5}{5}} + C.$

12. $\int \frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}-4} dx.$

Омс. $x+14\sqrt{x+2}+ \\ + 56 \ln |\sqrt{x+2}-4| + C.$

$$13. \int \frac{x^2 dx}{(5x+2) \sqrt{5x+2}}.$$

Омс. $\frac{2}{375} \frac{25x^2 - 40x - 32}{\sqrt{5x+2}} + C.$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt{1+x}}.$$

Омс. $3 \sqrt[3]{1+x} + 6 \sqrt[6]{1+x} + 6 \ln \left| \sqrt[6]{1+x} - 1 \right| + C.$

$$15. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}.$$

Омс. $\ln \left| \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}} \right| - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.$

$$16. \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x}.$$

Омс. $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + C.$

$$17. \int \sqrt{\frac{3x+2}{x-3}} dx.$$

Омс. $\sqrt{3x^2 - 7x - 6} + \frac{11}{2\sqrt{3}} \ln \left(x - \frac{7}{6} + \sqrt{x^2 - \frac{7}{3}x - 2} \right) + C.$

§ 6. ПОДСТАНОВКИ ЭЙЛЕРА

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx.$$

Данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции новой независимой переменной с помощью одной из трех подстановок Эйлера.

Первая подстановка Эйлера. Если $a > 0$, то применяется подстановка

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = z \pm x\sqrt{a}. \quad (11.23)$$

Здесь знак плюс или минус берется произвольно.

Тогда, возводя в квадрат, имеем

$$ax^2 + bx + c = z^2 \pm 2zx\sqrt{a} + ax^2,$$

или

$$bx + c = z^2 \pm 2\sqrt{a}zx,$$

откуда получаем

$$(b \mp 2\sqrt{a}z)x = z^2 - c.$$

Окончательно имеем

$$x = \frac{z^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}z}. \quad (11.24)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} dx &= \frac{2z(b \mp 2\sqrt{a}z) - (z^2 - c)(\mp 2\sqrt{a})}{(b \mp 2\sqrt{a}z)^2} dz = \\ &= \frac{2bz \mp 4\sqrt{a}z^2 \pm 2\sqrt{a}z^2 \mp 2\sqrt{a}c}{(b \mp 2\sqrt{a}z)^2} dz = \frac{2bz \mp 2\sqrt{a}z^2 \mp 2\sqrt{a}c}{(b \mp 2\sqrt{a}z)^2} dz = \\ &= \frac{2(bz \mp \sqrt{a}z^2 \mp \sqrt{a}c)}{(b \mp 2\sqrt{a}z)^2} dz. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Учитывая соотношение (11.24), запишем подстановку (11.23) в следующем рациональном виде:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2 + bx + c} &= z \pm x\sqrt{a} = z \pm \frac{z^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}z} \sqrt{a} = \\ &= \frac{zb \mp 2\sqrt{a}z^2 \pm \sqrt{a}z^2 \mp \sqrt{a}c}{b \mp 2\sqrt{a}z} = \frac{zb \mp \sqrt{a}z^2 \mp \sqrt{a}c}{b \mp 2\sqrt{a}z}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Тогда, принимая во внимание соотношения (11.24), (11.26) и (11.25), имеем

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \int R\left(\frac{z^2 - c}{b \mp 2\sqrt{a}z}, \frac{zb \mp \sqrt{a}z^2 \mp \sqrt{a}c}{b \mp 2\sqrt{a}z}\right) \times \\ &\times \frac{2(bz \mp \sqrt{a}z^2 \mp \sqrt{a}c)}{(b \mp 2\sqrt{a}z)^2} dz = \int r(z) dz, \end{aligned} \quad (11.27)$$

где $r(z)$ — рациональная функция z , т. е. получен интеграл от рациональной функции z , который может быть вычислен. Определив этот интеграл, необходимо в полученной первообразной заменить аргумент z его выражением через x :

$$z = \sqrt{ax^2 + bx + c} \mp x\sqrt{a}.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + c}}$.

Решение. Здесь $a = 1 > 0$. Поэтому полагаем $\sqrt{x^2 + c} = z - x$. После возведения в квадрат получим

$$x^2 + c = z^2 - 2xz + x^2,$$

откуда

$$x = \frac{z^2 - c}{2z}$$

и

$$dx = \frac{2z \cdot 2z - (z^2 - c) \cdot 2}{4z^2} dz = \frac{z^2 + c}{2z^2} dz.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2 + c} = z - x = z - \frac{z^2 - c}{2z} = \frac{z^2 + c}{2z}.$$

Подставляя полученные значения $\sqrt{x^2+c}$ и dx в данный интеграл, имеем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+c}} = \int \frac{\frac{z^2+c}{2z^2} dz}{\frac{z^2+c}{2z}} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C^* = \ln |x + \sqrt{x^2+c}| + C^*.$$

Вторая подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то применяется подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xz \pm \sqrt{c}. \quad (11.28)$$

Здесь знак плюс или минус можно брать произвольно.

Возводя обе части равенства в квадрат, имеем

$$ax^2+bx+c = x^2z^2 \pm 2xz\sqrt{c} + c,$$

или

$$ax^2+bx = x^2z^2 \pm 2xz\sqrt{c},$$

откуда после сокращения на x имеем

$$ax+b = xz^2 \pm 2z\sqrt{c}.$$

Независимая переменная x может быть определена как рациональная функция z , т. е.

$$x = \frac{\pm 2\sqrt{c}z - b}{a - z^2}. \quad (11.29)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\pm 2\sqrt{c}(a-z^2) - (\pm 2\sqrt{c}z - b)(-2z)}{(a-z^2)^2} dz = \\ &= \frac{\pm 2a\sqrt{c} \pm 2\sqrt{c}z^2 - 2bz}{(a-z^2)^2} dz = \frac{2(\pm a\sqrt{c} \pm \sqrt{c}z^2 - bz)}{(a-z^2)^2} dz. \end{aligned} \quad (11.30)$$

Поскольку x , dx и $\sqrt{ax^2+bx+c}$ выражаются рационально через z , то, подставляя найденные значения (11.28), (11.29) и (11.30) этих величин в интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$, приводим его к интегралу от рациональной функции z .

Третья подстановка Эйлера. Эту подстановку применяют в случае, если трехчлен ax^2+bx+c имеет действительные корни.

Пусть x_1 и x_2 — действительные корни трехчлена ax^2+bx+c . Тогда применяется подстановка

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_1)z. \quad (11.31)$$

Так как

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x-x_1)z,$$

или, возводя последнее равенство в квадрат,

$$a(x-x_1)(x-x_2) = (x-x_1)^2 z^2,$$

откуда после сокращения имеем

$$a(x - x_2) = (x - x_1)z^2.$$

Следовательно,

$$ax - ax_2 = xz^2 - x_1z^2,$$

или

$$(a - z^2)x = ax_2 - x_1z^2.$$

Отсюда

$$x = \frac{ax_2 - x_1z^2}{a - z^2}, \quad (11.32)$$

т. е. x представляется рациональной функцией z .

Далее находим

$$dx = \frac{-2x_1z(a - z^2) - (ax_2 - x_1z^2)(-2z)}{(a - z^2)^2} dz = \frac{2a(x_2 - x_1)z}{(a - z^2)^2} dz. \quad (11.33)$$

Так как x , dx и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ согласно соотношениям (11.32), (11.33) и (11.31) рационально зависят от z , то интеграл $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ приводится к интегралу от рациональной функции z . Заметим, что для вычисления любого интеграла вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ достаточно первой и третьей подстановок Эйлера.

Действительно, если $b^2 - 4ac > 0$, то корни трехчлена действительны и применима третья подстановка Эйлера.

Если же $b^2 - 4ac \leq 0$, то

$$ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a} [(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$$

и знак трехчлена совпадает со знаком коэффициента a . Для того чтобы $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ был действительным, необходимо, чтобы трехчлен являлся положительным, т. е. a должно быть больше нуля и тогда применима первая подстановка Эйлера.

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x-x^2-2}}$.

Решение. Трехчлен $3x - x^2 - 2 = -x^2 + 3x - 2$ имеет действительные корни $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$. Таким образом,

$$\sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{-(x-1)(x-2)}.$$

Полагаем

$$\sqrt{-(x-1)(x-2)} = (x-1)z.$$

Возводя в квадрат последнее равенство, имеем

$$-(x-1)(x-2) = (x-1)^2z^2,$$

или (после сокращения)

$$-(x-2) = (x-1)z^2.$$

Раскрывая скобки и группируя подобные члены, получаем

$$x = \frac{-2 - z^2}{1 + z^2},$$

откуда

$$dx = \frac{2z}{1 + z^2} dz.$$

Тогда

$$\sqrt{-(x-1)(x-2)} = \left(\frac{-2 - z^2}{1 + z^2} - 1 \right) z = \frac{-2z^3 - 3z}{1 + z^2}.$$

Возвращаясь к исходному интегралу, находим

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x-x^2-2}} &= \int \frac{\frac{2z}{1+z^2} dz}{\left(\frac{-2-z^2}{1+z^2} - 1 \right) \frac{(-2z^3-3z)}{1+z^2}} = 2 \int \frac{z^2+1}{-2z^3-3} dz = \\ &= 2 \int \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2z^3+3)} \right] dz = -\int dz + \int \frac{dz}{2z^3+3} = \\ &= -z + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^3 + \frac{3}{2}} = -z + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C = \\ &= -z + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}} z + C. \end{aligned}$$

Так как $z = \frac{\sqrt{-(x-1)(x-2)}}{x-1}$, то искомым интеграл

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{3x-x^2-2}} = \frac{\sqrt{-(x-1)(x-2)}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-2(x-1)(x-2)}}{(x-1)\sqrt{3}} + C.$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$. *Омс.* $\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-x+3} - \sqrt{3}}{x} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right| + C.$
2. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} dx$. *Омс.* $\sqrt{x^2+2x} + \ln |x+1 + \sqrt{x^2+2x}| + C.$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}$. *Омс.* $\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} + C.$
4. $\int \sqrt{2x-x^2} dx$. *Омс.* $\frac{1}{2} [(x-1)\sqrt{2x-x^2} + \arcsin(x-1)] + C.$
5. $\int \frac{(x+1)dx}{(2x+x^2)\sqrt{2x+x^2}}$. *Омс.* $-\frac{1}{\sqrt{2x+x^2}} + C.$

§ 7. ИНТЕГРИРОВАНИЕ БИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

Биномиальным дифференциалом называется выражение

$$x^m (a + bx^n)^p dx,$$

где m, n, p — рациональные числа; a, b — постоянные, отличные от нуля.

Интеграл

$$I = \int x^m (a + bx^n)^p dx \quad (11.34)$$

приводится к интегралу от рациональной функции и выражается через элементарные функции в следующих трех случаях.

Случай 1. Показатель степени бинома p является положительным или отрицательным целым числом или нулем. Тогда, применяя подстановку

$$x^n = z \text{ или } x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} dz, \quad (11.35)$$

преобразуем данный интеграл следующим образом:

$$\begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m}{n}} (a + bz)^p z^{\frac{1}{n}-1} dz = \\ &= \frac{1}{n} \int z^{\frac{m+1}{n}-1} (a + bz)^p dz = \frac{1}{n} \int z^q (a + bz)^p dz, \end{aligned} \quad (11.36)$$

где

$$q = \frac{m+1}{n} - 1.$$

Число q является рациональным; обозначим его через r/s . Тогда данный интеграл принимает вид

$$I = \int R \left(z^{\frac{r}{s}}, z \right) dz.$$

Этот интеграл, как уже известно, приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $z = t^s$ и сводится к интегралу от суммы степенных функций.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[3]{x} + 1)^2} = \int x^{-1/2} (1 + x^{1/3})^{-2} dx$.

Решение. Здесь $m = -1/2$, $n = 1/3$, $p = -2$, т. е. p является целым числом. Поскольку $n = 1/3$, положим $x = z^3$, откуда $dx = 3z^2 dz$, $x^{-1/2} = z^{-3/2}$, $x^{1/3} = z$.

Подставляя найденные значения в данный интеграл, имеем

$$\begin{aligned} \int x^{-1/2} (1 + x^{1/3})^{-2} dx &= 3 \int z^{-3/2} (1 + z)^{-2} z^2 dz = \\ &= 3 \int z^{1/2} (1 + z)^{-2} dz = 3 \int \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz. \end{aligned}$$

Полученный интеграл приведем к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $z = t^2$, так как здесь $r/s = 1/2$, т. е. $s = 2$. Тогда $dz = 2t dt$. Отсюда

$$3 \int \frac{\sqrt{z}}{(1+z)^2} dz = 3 \cdot 2 \int \frac{t}{(1+t^2)^2} t dt = 6 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}.$$

Последний интеграл находим методом интегрирования по частям, полагая

$$\frac{t dt}{(1+t^2)^2} = dv, \quad t = u,$$

откуда

$$v = \frac{1}{2} \int (1+t^2)^{-2} d(1+t^2) = -\frac{1}{2(1+t^2)}; \quad du = dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} 6 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} &= -\frac{3t}{1+t^2} + 3 \int \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{3t}{1+t^2} + 3 \operatorname{arctg} t + C = \\ &= -\frac{3\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} + 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \end{aligned}$$

Случай 2. Показатель степени $p = \mu/\nu$ — дробь, а выражение $(m+1)/n$ — целое число.

В этом случае число $q = (m+1)/n - 1$ также является целым. Число p является рациональным, поэтому его можно представить в виде $p = \mu/\nu$. Тогда рассматриваемый интеграл приводится к интегралу вида

$$\int R [z^q, (a+bz)^{\mu/\nu}] dz,$$

который, как уже известно, сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $a+bz = t^\nu$, где ν — знаменатель дроби p .

Пример 2. Найти $\int \frac{\sqrt[5]{x} dx}{\sqrt[5]{3-2\sqrt[5]{x^3}}}.$

Решение. Представим данный интеграл в виде

$$\int x^{1/5} (3-2x^{3/5})^{-1/2} dx.$$

Здесь $m = 1/5$, $n = 3/5$, $(m+1)/n = 2$ — целое число. Пусть $3-2x^{3/5} = z^2$.

Дифференцируя принятую подстановку, имеем

$$-2 \cdot \frac{3}{5} x^{-2/5} dx = 2z dz,$$

или

$$x^{-2/5} dx = -\frac{5}{3} z dz.$$

Тогда заданный интеграл проще всего определяется так:

$$\begin{aligned} \int (3-2x^{3/5})^{-1/2} x^{1/5} \cdot x^{2/5} \cdot x^{-2/5} dx &= \int (3-2x^{3/5})^{-1/2} x^{3/5} (x^{-2/5} dx) = \\ &= \int (z^2)^{-1/2} \frac{3-z^2}{2} \left(-\frac{5}{3} z dz \right) = -\frac{5}{6} \int (3-z^2) dz = -\frac{5}{2} z + \frac{5}{18} z^3 + C = \\ &= -\frac{5}{2} \sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}} + \frac{5}{18} (3-2\sqrt[5]{x^3}) \sqrt{3-2\sqrt[5]{x^3}} + C. \end{aligned}$$

Случай 3. Числа $p = h/k$ и $(m+1)/n$ — дробные, а их сумма $(m+1)/n + p$ — целое число.

В этом случае число $(m+1)/n - 1 + p = q + p$ также является целым.

Данный интеграл преобразуется к виду (11.36), т. е.

$$\int z^q (a+bz)^p dz = \int z^{q+p} \left(\frac{a+bz}{z} \right)^p dz,$$

где $q+p$ — целое число, $p = h/k$ — рациональное число. Полученный интеграл является интегралом вида $\int R \left[z, \left(\frac{a+bz}{z} \right)^{h/k} \right] dz$, который приводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{a+bz}{z} = t^k$.

Пример 3. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^2}}{x^6} dx$.

Решение. Представим данный интеграл в виде

$$\int x^{-6} (1+2x^3)^{2/3} dx.$$

Здесь $m = -6$, $n = 3$, $p = 2/3$, $(m+1)/n = -5/3$, $(m+1)/n + p = -1$. Пусть $x^{-3} + 2 = z^3$. Дифференцируя, имеем

$$-3x^{-4} dx = 3z^2 dz, \text{ или } x^{-4} dx = -z^2 dz.$$

Представляя $1+2x^3$ в виде $x^3(x^{-3}+2)$, получаем

$$\begin{aligned} \int x^{-6} [x^3 (x^{-3} + 2)]^{2/3} dx &= \int x^{-6} \cdot x^2 (x^{-3} + 2)^{2/3} dx = \\ &= \int x^{-4} (x^{-3} + 2)^{2/3} dx = \int (z^3)^{2/3} (-z^2 dz) = \int z^2 \cdot (-z^2 dz) = -\int z^4 dz = \\ &= -\frac{z^5}{5} + C = -\frac{1}{5} x^{-5} (1+2x^3)^{5/3} + C = -\frac{1}{5x^5} (1+2x^3)^{5/3} \sqrt[3]{(1+2x^3)^2} + C, \end{aligned}$$

так как здесь

$$z = (x^{-3} + 2)^{1/3}, \quad z^5 = (x^{-3} + 2)^{5/3} = \left(\frac{1+2x^3}{x^3} \right)^{5/3} = \frac{(1+2x^3)^{5/3}}{x^5}.$$

Упражнения

Найти следующие неопределенные интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

2. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \sqrt{1+x^2}}.$

Отв. $2(1+\sqrt[3]{x}) \sqrt{1+\sqrt[3]{x}} + C.$

Отв. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$

$$3. \int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2} dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{5x^3-3}{40}(1+x^3) \sqrt[3]{(1+x^3)^2} + C.$$

$$4. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$\text{Омс. } 12 \left(1 + \sqrt[4]{x}\right) \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} \times \\ \times \left(\frac{1 + \sqrt[4]{x}}{7} - \frac{1}{4}\right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}.$$

$$\text{Омс. } \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} + C.$$

$$6. \int x^3 \sqrt[3]{5+x^2} dx.$$

$$\text{Омс. } \frac{3}{56} (5+x^2) (4x^2-15) \times \\ \times \sqrt[3]{5+x^2} + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{x^2 (1+x^2) \sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{Омс. } -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \left(2x + \frac{1}{x}\right) + C.$$

В заключение отметим, что многие интегралы можно находить несколькими способами. В результате получаются различные по виду первообразные функции, но с помощью преобразований их всегда можно свести к выражениям, которые различаются только постоянными слагаемыми. Однако подобные преобразования не всегда просты. Поэтому для проверки проще все полученные ответы продифференцировать. Если произвольные одинаковы, то, следовательно, функции могут различаться только на постоянное слагаемое.

Следует также иметь в виду, что не каждая первообразная выражается в конечном виде через элементарные функции. Так, например, интегралы $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sin(x^2) dx$, $\int \cos(x^2) dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \frac{\cos x}{x} dx$, $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \sqrt{1-k^2 \sin^2 x} dx$ и многие другие не выражаются через элементарные функции. Эти интегралы существуют, поскольку существует интеграл от любой непрерывной функции, но представляют собой неэлементарные функции. Такие интегралы могут быть вычислены только приближенными методами.

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть в интеграле

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

значение аргумента x изменяется от a до b . При этом предполагается, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке значений аргумента от a до b . Числа a и b называют соответственно *нижним* и *верхним пределами* интегрирования.

Пусть, например, в интеграле $\int 2x dx = x^2 + C$ аргумент изменяется от $x=4$ до $x=16$. Тогда приращение любой из первообразных функций $x^2 + C$ в указанном промежутке значений x будет $(16^2 + C) - (4^2 + C) = 256 - 16 = 240$.

Полученное приращение первообразных функций представляет собой пример определенного интеграла.

Приращение $F(b) - F(a)$, получаемое любой первообразной при переходе ее аргумента от значения a к значению b , *одинаково* для всех первообразных и, следовательно, является *величиной постоянной*, не зависящей от взятой первообразной $F(x)$, а зависящей лишь от самой производной $f(x)$ и пределов a и b .

Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом*. Таким образом, определенный интеграл является числом.

§ 2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ОПРЕДЕЛЕННОМУ ИНТЕГРАЛУ

Рассмотрим задачу о площади, приводящую к определенному интегралу. Пусть необходимо найти площадь криволинейной трапеции $aABba$ (рис. 12.1), образованной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и ординатами $x=a$ и $x=b$. Как известно, найти такую площадь с помощью формул планиметрии нельзя.

Разобьем отрезок $[a, b]$, длина которого $b-a$, на n равных или неравных частей, в результате чего получим $n-1$ точек деления $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. В каждой из таких точек проведем ординаты $y_1=f(x_1), y_2=f(x_2), \dots, y_{n-1}=f(x_{n-1})$, которые разобьют площадь криволинейной трапеции на n полосок.

Через точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ пересечения этих ординат с линией $y=f(x)$ проведем отрезки прямой, параллельные оси абсцисс.

Таким образом, в каждой полоске получается прямоугольник, а сумма площадей этих прямоугольников образует площадь S_n ступенчатой фигуры $aACA_1DA_2EA_3 \dots HA_{n-1}Kba$. Для вычисле-

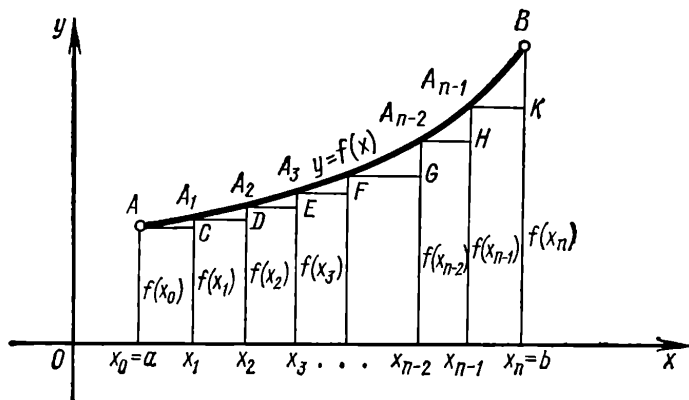


Рис. 12.1

ния площади ступенчатой фигуры найдем предварительно площади S_i ($i = 1, 2, \dots, n$) прямоугольников:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= f(x_0)(x_1 - x_0), \\ S_2 &= f(x_1)(x_2 - x_1), \\ S_3 &= f(x_2)(x_3 - x_2), \\ &\dots \dots \dots \\ S_n &= f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

Тогда площадь

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n = f(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_1) \cdot (x_2 - x_1) + f(x_2) \cdot (x_3 - x_2) + \dots + f(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}). \quad (12.2)$$

Полученное выражение представляет собой сумму слагаемых аналогичного вида, а именно $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1$. Запишем выражение площади в сокращенном виде

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$$

или, обозначая $f(x_i) = y_i$, в виде

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i). \quad (12.3)$$

Итак, найдена площадь ступенчатой фигуры. Очевидно, если увеличивать неограниченно число n точек деления (устремляя длину наибольшего из отрезков деления к нулю) и перейти к пределу, то получим, что искомая площадь S криволинейной трапеции $aABba$ равна

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i). \quad (12.4)$$

К полученному пределу приводится целый ряд прикладных задач, поэтому вопрос об определении предела вида (12.4) очень важен.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ КАК ПРЕДЕЛ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СУММЫ. СУММЫ ДАРБУ

Пусть на отрезке $[a, b]$ ($a < b$) оси абсцисс задана непрерывная функция $y = f(x)$. Отрезок $[a, b]$ разделим на n частей произвольной длины точками, абсциссы которых

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Каждый такой отрезок будем называть *частичным отрезком*. Длины частичных отрезков, равные разности $x_i - x_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), соответственно обозначим:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0, \\ \Delta x_2 &= x_2 - x_1, \\ \Delta x_3 &= x_3 - x_2, \\ &\vdots \\ \Delta x_n &= x_n - x_{n-1}. \end{aligned}$$

Пусть m и M — наименьшее и наибольшее значения непрерывной ограниченной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ если } a \leq x \leq b.$$

Промежуточные точки x_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$) разбивают отрезок $[a, b]$ на n частичных, не обязательно равных, отрезков

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n].$$

Наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на частичных отрезках принимаем соответственно равными:

$$\begin{aligned} m_1 \text{ и } M_1 &\text{ на отрезке } [x_0, x_1], \\ m_2 \text{ и } M_2 &\text{ на отрезке } [x_1, x_2], \\ m_3 \text{ и } M_3 &\text{ на отрезке } [x_2, x_3], \\ &\vdots \\ m_n \text{ и } M_n &\text{ на отрезке } [x_{n-1}, x_n]. \end{aligned}$$

Таким образом, величины m_i и M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) обозначают, соответственно, точные нижнюю и верхнюю границы функции $f(x)$ в i -м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$.

Следуя Дарбу, введем как вспомогательные две простые суммы. Составим сумму

$$\underline{S}_n = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i. \quad (12.5)$$

Сумма $\underline{S}_n$ называется *нижней интегральной суммой* и при $f(x) \geq 0$ численно равна площади вписанной (заштрихованной) ступенчатой фигуры $aABCDEHK\dots PRTba$, ограниченной вписанной ломаной (рис. 12.2).

Аналогично составим сумму

$$\bar{S}_n = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i. \quad (12.6)$$

Сумма $\bar{S}_n$ называется *верхней интегральной суммой* и при $f(x) \geq 0$ численно равна площади описанной ступенчатой фигуры $aA_1CC_1EFGHLN \dots QT_1ba$, ограниченной описанной ломаной.

Нижняя и верхняя интегральные суммы называются *суммами Дарбу*.

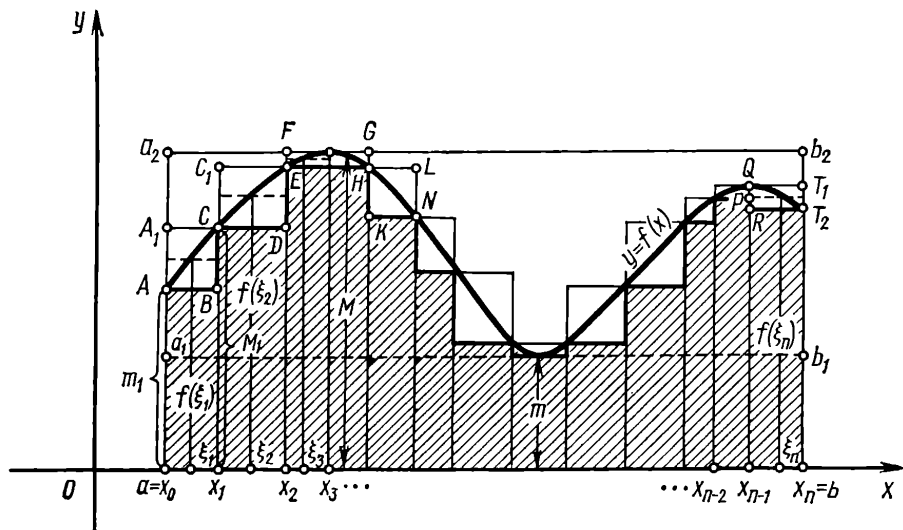


Рис. 12.2

Так как $m_i \leq M_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$), то на основании зависимостей (12.5) и (12.6)

$$\underline{S}_n \leq \bar{S}_n. \quad (12.7)$$

Здесь знак равенства будет в случае, если $f(x) = \text{const}$.

Поскольку наименьшие значения функции на частичных отрезках больше или равны наименьшему значению функции на всем отрезке $[a, b]$, т. е. $m_1 \geq m$, $m_2 \geq m$, ..., $m_n \geq m$, то

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n \geq m \Delta x_1 + m \Delta x_2 + \dots \\ &\dots + m \Delta x_n = m (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = m (b-a). \end{aligned} \quad (12.8)$$

Поскольку наибольшие значения функции на частичных отрезках меньше или равны наибольшему значению функции на всем отрезке $[a, b]$, т. е. $M_1 \leq M$, $M_2 \leq M$, ..., $M_n \leq M$, то

$$\begin{aligned} \bar{S}_n &= M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n \leq \\ &\leq M \Delta x_1 + M \Delta x_2 + \dots + M \Delta x_n = \\ &= M (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots + \Delta x_n) = M (b-a). \end{aligned} \quad (12.9)$$

Геометрический смысл неравенства (12.12) при $f(x) \geq 0$ заключается в том, что фигура, площадь которой S_n ограничена ломаной, заключена между вписанной и описанной ломаными. Значение интегральной суммы S_n зависит от принятого способа разделения отрезка $[a, b]$ (на равные или неравные части) и от выбора в каждом отрезке промежуточной точки ξ_i .

Будем неограниченно увеличивать число n частичных отрезков, соблюдая при этом условие, чтобы наибольшая длина $\max \Delta x_i$ каждого такого отрезка стремилась к нулю. Для любого разделения отрезка, выбрав соответствующие значения ξ_i , можно составить интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i.$$

Пусть при некоторой принятой последовательности разбиения отрезка $[a, b]$ и при длине наибольшего из частичных отрезков $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ эта сумма стремится к определенному пределу I .

Если интегральная сумма стремится к определенному пределу I , не зависящему ни от способа разбиения отрезка на части ни от выбора точек ξ_i внутри частичных отрезков, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$, а предел этой суммы, если он существует, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Таким образом,

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (12.13)$$

Этот предел существует, следовательно, существует и определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, не зависящий от способа деления отрезка $[a, b]$ на части и от выбора точек ξ_i на каждом частичном отрезке, если функция $y = f(x)$ является непрерывной на отрезке $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ называется *интервалом* (отрезком) *интегрирования*.

Итак, определенным интегралом от заданной непрерывной функции на отрезке $[a, b]$ называется предел, к которому стремятся все интегральные суммы от этой функции, составленные на заданном отрезке, при условии, что число n частичных отрезков неограниченно возрастает, а длина наибольшего из них стремится к нулю.

Определяя предел (12.13) суммы $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ при условии стремления к нулю длины наибольшего из частичных отрезков Δx_i ,

следует иметь в виду, что каждое слагаемое $f(\xi_i) \Delta x_i$ является бесконечно малой величиной, так как в предельном процессе Δx_i — величина бесконечно малая, а значения $f(\xi_i)$ — конечные, поскольку функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ по предположению непрерывна.

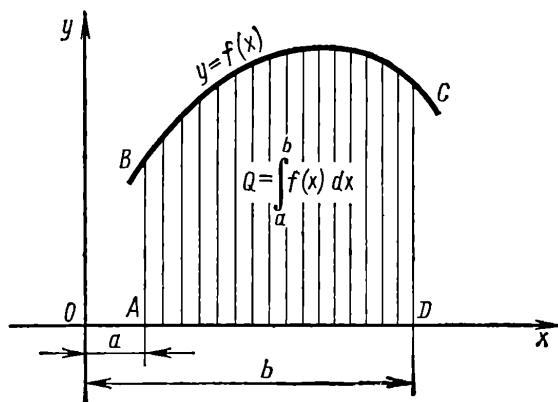


Рис. 12.3

Если $a < b$ и функция $f(x) \geq 0$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади Q криволинейной трапеции $ABCD$, ограниченной дугой BC кривой $y = f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и вертикалями AB и CD (рис. 12.3), уравнения которых $x = a$ и $x = b$.

Если $a < b$ и функция $f(x) \leq 0$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ представляет собой площадь соответствующей криволинейной трапеции, взятую со знаком минус (рис. 12.4), т. е.

$$-Q = \int_a^b f(x) dx.$$

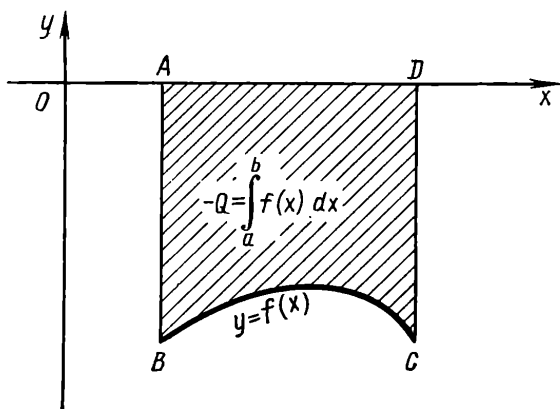


Рис. 12.4

Если $a < b$ и функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$, т. е. функция пересекает в нескольких точках ось Ox , то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих трапеций: площади трапеций, лежащих выше оси абсцисс, берутся со знаком плюс, ниже оси абсцисс — со знаком минус

(рис. 12.5), т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \dots + S_n,$$

где $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots, S_n$ — площади соответствующих трапеций. Интеграл по всему отрезку $[a, b]$ представляет собой разность площадей, расположенных выше и ниже оси абсцисс.

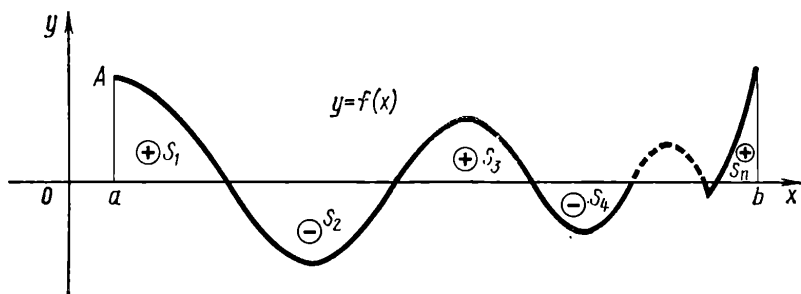


Рис. 12.5

§ 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ОПРЕДЕЛЕННЫМ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛАМИ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА — ЛЕЙБНИЦА

Вычисление определенного интеграла как предела интегральной суммы представляет в общем случае очень трудную задачу нахождения пределов функций, для решения которой приходится применять ряд искусственных приемов. Поэтому был введен более общий метод и установлена связь между определенным и неопределенным интегралами, сводящая вычисление определенного интеграла к вычислению первообразной функции.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$ и известна какая-нибудь ее первообразная функция $F(x)$, т. е.

$$f(x) = F'(x). \quad (12.14)$$

Разделим отрезок $[a, b]$ на n равных или неравных частичных отрезков

$$[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_i, x_{i+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n = b],$$

причем

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа о конечном приращении на каждом частичном отрезке, поэтому, применяя

дел любой интегральной суммы равен разности $F(b) - F(a)$. Следовательно, заменяя в равенстве (12.18) предел интегральной суммы определенным интегралом $\int_a^b f(x) dx$, имеем

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (12.19)$$

Это *формула Ньютона—Лейбница*, устанавливающая связь между определенным и неопределенным интегралами. Согласно формуле Ньютона—Лейбница, определенный интеграл от непрерывной функции $y=f(x)$ в пределах от a до b равен разности значений первообразной функции $F(x)$, вычисленной для верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Итак, для того чтобы вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ нужно:

1) найти первообразную функцию $F(x)$ (или неопределенный интеграл для функции $f(x)$);

2) подставить в найденную первообразную вместо независимой переменной x сначала верхний, а затем нижний предел интегрирования;

3) вычесть из результата второй подстановки результат первой подстановки.

В связи с этим формулу Ньютона—Лейбница удобнее записать в виде

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a). \quad (12.20)$$

Символ $[F(x)]_a^b$ обозначает определение первообразной при сохранении пределов интегрирования. Наряду с этим символом применяется также запись $F(x)|_a^b$. Знаки $|_a^b$ или $[_a^b]$ называются *символами функциональной подстановки*.

Пример 1. Вычислить по формуле Ньютона—Лейбница интеграл

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx.$$

Решение. Находим

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = \frac{2}{3}.$$

Пример 2. Вычислить по формуле Ньютона—Лейбница интеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx.$$

Решение. Имеем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

Если включить произвольную постоянную C в состав первообразной, то она уничтожается:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx &= [\sin x + C]_0^{\pi/2} = \left(\sin \frac{\pi}{2} + C \right) - (\sin 0 + C) = \\ &= 1 + C - 0 - C = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, безразлично, какой из первообразных для данной функции воспользоваться при вычислении определенного интеграла. Поэтому при вычислении определенных интегралов произвольная постоянная C не включается в первообразную функцию.

§ 5. ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Свойство 1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt. \quad (12.21)$$

Действительно, так как $f(x)$ и $f(t)$ обозначают одну и ту же функцию, то интеграл, стоящий в левой части равенства (12.21), на основании формулы Ньютона—Лейбница можно преобразовать к виду

$$\int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

а интеграл, стоящий в правой части равенства—к виду

$$\int_a^b f(t) \, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Правые части этих интегралов одинаковы, поэтому, сопоставляя левые части, находим

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Свойство 2. Определенный интеграл с равными пределами интегрирования равен нулю, т. е.

$$\int_a^a f(x) \, dx = 0. \quad (12.22)$$

Действительно,

$$\int_a^a f(x) dx = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0.$$

Свойство 3. Определенный интеграл от дифференциала независимой переменной равен длине отрезка интегрирования, т. е.

$$\int_a^b dx = b - a. \quad (12.23)$$

Действительно,

$$\int_a^b dx = x \Big|_a^b = b - a.$$

Свойство 4. Если поменять местами пределы определенного интеграла, то его знак изменится на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (12.24)$$

Действительно, на основании формулы Ньютона—Лейбница интеграл, стоящий в левой части равенства, равен

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (12.25)$$

а интеграл, стоящий в правой части, равен

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b),$$

откуда

$$F(b) - F(a) = - \int_b^a f(x) dx. \quad (12.25')$$

Сравнивая равенства (12.25) и (12.25'), находим

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Свойство 5. Постоянный множитель A можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b Af(x) dx = A \int_a^b f(x) dx. \quad (12.26)$$

Действительно, на основании определения определенного интеграла как интегральной суммы можно написать

$$\begin{aligned}\int_a^b A f(x) dx &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} [A f(\xi_1) \Delta x_1 + A f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + A f(\xi_n) \Delta x_n] = \\ &= A \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} [f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n] = A \int_a^b f(x) dx,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 6. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от каждой из них:

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + \varphi(x) + \dots - \psi(x)] dx &= \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx + \dots - \int_a^b \psi(x) dx.\end{aligned}\quad (12.27)$$

Действительно, согласно определению определенного интеграла, имеем

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x) + \varphi(x) + \dots - \psi(x)] dx &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \{[f(\xi_1) + \varphi(\xi_1) + \dots - \psi(\xi_1)] \times \\ &\times \Delta x_1 + [f(\xi_2) + \varphi(\xi_2) + \dots - \psi(\xi_2)] \Delta x_2 + \dots + [f(\xi_n) + \varphi(\xi_n) + \dots - \\ &- \psi(\xi_n)] \Delta x_n\} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} [f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n] + \\ &+ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} [\varphi(\xi_1) \Delta x_1 + \varphi(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + \varphi(\xi_n) \Delta x_n] + \dots - \\ &- \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} [\psi(\xi_1) \Delta x_1 + \psi(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + \psi(\xi_n) \Delta x_n] = \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b \varphi(x) dx + \dots - \int_a^b \psi(x) dx,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 7. Для любого числа c внутри интервала интегрирования ($a < c < b$) определенный интеграл в пределах от a до b можно разбить на сумму двух определенных интегралов в пределах от a до c и от c до b , т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (12.28)$$

Действительно, на основании формулы Ньютона — Лейбница имеем:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

$$\int_a^c f(x) dx = F(c) - F(a),$$

$$\int_c^b f(x) dx = F(b) - F(c).$$

Складывая почленно два последних равенства, находим

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a).$$

Следовательно, учитывая первое из равенств, получаем

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Это равенство выражает очевидное геометрическое свойство определенного интеграла: площадь трапеции $aABba$ равна сумме площадей трапеций $aACca$ и $cCBba$ (рис. 12.6).

Равенство (12.28) может быть распространено на любое конечное число точек деления c_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Свойство 8. Производная определенного интеграла по верхнему пределу интегрирования равна значению подынтегральной функции для этого предела, т. е.

$$\frac{d}{dz} \int_a^z f(x) dx = f(z). \quad (12.29)$$

Пусть нижний предел интегрирования — постоянное число, а верхний предел — переменный. Обозначим верхний предел через z , тогда на основании формулы Ньютона — Лейбница имеем

$$\int_a^z f(x) dx = F(z) - F(a).$$

Действительно, дифференцируя полученное равенство, находим

$$\frac{d}{dz} \int_a^z f(x) dx = \frac{d}{dz} [F(z) - F(a)] = \frac{d}{dz} F(z) - 0 = F'(z) = f(z).$$

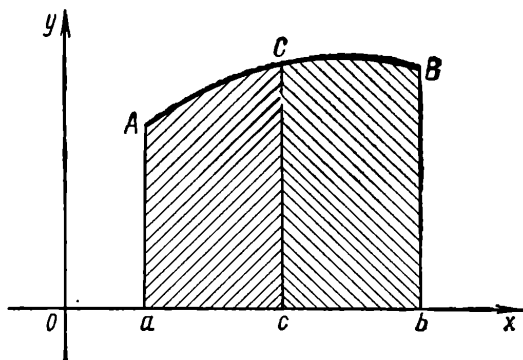


Рис. 12.6

Следовательно,

$$\frac{d}{dz} \int_a^z f(x) dx = f(z),$$

что и требовалось доказать.

§ 6. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Непосредственное интегрирование. Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ нужно найти соответствующую первообразную функцию, в полученное выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний предел определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т. е. применить формулу Ньютона—Лейбница.

Пример 1. Вычислить $\int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx$.

Решение. Применяя к заданному определенному интегралу формулу Ньютона—Лейбница, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x^4 + 1) dx &= \left(\frac{x^5}{5} + x \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} + 1 \right) - \left(-\frac{1}{5} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{5} + 1 + \frac{1}{5} + 1 = 2\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int_1^5 (15 - 2x) dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^5 (15 - 2x) dx &= (15x - x^2) \Big|_1^5 = (15 \cdot 5 - 5^2) - (15 \cdot 1 - 1^2) = \\ &= (75 - 25) - (15 - 1) = 36. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^6 (72x - 12x^2) dx$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^6 (72x - 12x^2) dx &= (36x^2 - 4x^3) \Big|_0^6 = (36 \cdot 6^2 - 4 \cdot 6^3) - \\ &- (36 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0^3) = 6^3 (6 - 4) - (0 - 0) = 216 \cdot 2 = 432. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} (-1) = \\ &= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Пример 5. Вычислить $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение. Имеем

$$\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$$

Упражнения

Вычислить непосредственным интегрированием следующие определенные интегралы:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Отв. $\pi/4$.

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$.

Отв. 1.

3. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.

Отв. $\ln 2$.

4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Отв. $\pi/4$.

5. $\int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

Отв. $\pi/4$.

6. $\int_0^1 e^{-3x} \, dx$.

Отв. $\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Отв. $1 - \pi/4$.

8. $\int_2^3 \frac{x \, dx}{1+x^2}$.

Отв. $\frac{1}{2} \ln 2$.

9. $\int_1^4 \frac{dx}{x \sqrt{x}}$.

Отв. 1.

10. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

Отв. $\pi/2$.

11. $\int_1^3 \frac{dx}{3+x^2}$.

Отв. $\frac{\pi \sqrt{3}}{18}$.

2. Интегрирование с помощью замены переменной. Рассмотрим определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y = f(x)$. Введем новую переменную z зависимостью

$$x = \varphi(z).$$

Пусть:

- 1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
 - 2) функции $\varphi(z)$ и $\varphi'(z)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$ изменения новой переменной z ;
 - 3) функция $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$.
- Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (12.30)$$

Интегрируя равенство (12.30) в пределах от a до b , получаем

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a). \quad (12.30')$$

С другой стороны, заменяя в равенстве (12.30) исходную переменную x новой переменной z , имеем

$$\int f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = F[\varphi(z)] + C. \quad (12.31)$$

Интегрируя равенство (12.31) в пределах от α до β , получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz = F[\varphi(z)] \Big|_{\alpha}^{\beta} = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a). \quad (12.31')$$

Правые части выражений (12.30') и (12.31') равны, следовательно, равны и левые части этих выражений, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(z)] \varphi'(z) dz. \quad (12.32)$$

Если первообразную находят методом замены переменной, то необходимо соответственно изменить пределы интегрирования; в этом случае нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной.

Пример 1. Вычислить методом подстановки $\int_9^{16} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $\sqrt{x} = t$, тогда $x = t^2$ и $dx = 2t dt$. Пределы интегрирования таковы:

при $x = 9$ $t = \sqrt{9} = 3$ (новый нижний предел);

при $x = 16$ $t = \sqrt{16} = 4$ (новый верхний предел).

Тогда

$$\int_9^{16} \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_3^4 \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int_3^4 \frac{t dt}{t+1}.$$

Так как

$$\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1},$$

то

$$\begin{aligned} 2 \int_3^4 \frac{t dt}{t+1} &= 2 \int_3^4 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = 2 [t - \ln(t+1)]_3^4 = \\ &= 2 [4 - \ln(1+4)] - 2 [3 - \ln(1+3)] = 2 (4 - \ln 5 - 3 + \ln 4) = \\ &= 2 - 2 \ln \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить методом подстановки $\int_0^7 \sqrt{49-x^2} dx$.

Решение. Введем подстановку $x=7 \sin t$, тогда $dx=7 \cos t dt$. Новые пределы интегрирования таковы:

$$t=0 \text{ при } x=0; \quad t=\pi/2 \text{ при } x=7.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^7 \sqrt{49-x^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{49-49 \sin^2 t} 7 \cos t dt = \\ &= 49 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = 49 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \\ &= 49 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t\right) dt = 49 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi/2} = 12,25 \pi. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить методом подстановки интеграл

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{3+e^x} dx.$$

Решение. Используем подстановку

$$t = \sqrt{e^x-1}. \quad (*)$$

Новые пределы интегрирования таковы:

$$\text{при } x_{\text{ниж}}=0 \quad \text{имеем } t_{\text{ниж}}=\sqrt{e^0-1}=0;$$

$$\text{при } x_{\text{верх}}=\ln 5 \quad \text{имеем } t_{\text{верх}}=\sqrt{e^{\ln 5}-1}=\sqrt{5-1}=2.$$

Возводя обе части равенства (*) в квадрат, находим

$$e^x-1=t^2,$$

откуда

$$e^x=t^2+1$$

или $x \ln x = \ln(t^2 + 1)$, т. е. $x = \ln(t^2 + 1)$. Тогда

$$dx = \frac{2tdt}{t^2 + 1}.$$

Подставляя найденные значения x и dx в данный интеграл, имеем

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{3 + e^x} dx = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1)t}{4 + t^2} \cdot \frac{2tdt}{t^2 + 1} = \int_0^2 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4}.$$

Разделив числитель на знаменатель, получим

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left[t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right]_0^2 = \\ &= 2 [2 - 2 \operatorname{arctg} 1] = 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} = 4 - \pi. \end{aligned}$$

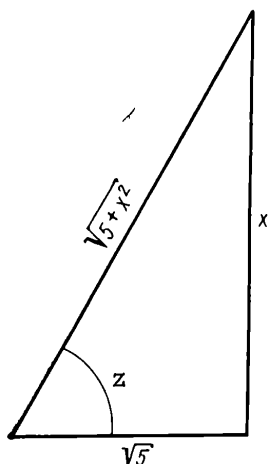


Рис. 12.7

Вычислять определенные интегралы методом подстановки можно и не изменяя пределы интегрирования. В этом случае следует вычислить предварительно соответствующий неопределенный интеграл и подставить в найденную первообразную функцию данные пределы.

Пример 4. Вычислить методом подстановки

$$\int_3^5 \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^3} dx.$$

Решение. Для нахождения соответствующего неопределенного интеграла применим подстановку $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} z$, откуда

$$dx = \sqrt{5} \frac{dz}{\cos^2 z} = \sqrt{5} \sec^2 z dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^3} dx &= \int \frac{\sqrt{5+5 \operatorname{tg}^2 z}}{5 \operatorname{tg}^3 z} \sqrt{5} \sec^2 z dz = \int \frac{\sqrt{5} \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{5 \operatorname{tg}^3 z} \sqrt{5} \sec^2 z dz = \\ &= \int \frac{\sec^2 z}{\operatorname{tg}^3 z} dz = \int \frac{dz}{\sin^2 z \cos z} = \int \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\sin^2 z \cos z} dz = \int \frac{dz}{\cos z} + \int \sin^{-2} z \cos z dz = \\ &= \int \frac{dz}{\cos z} + \int \sin^{-2} z d(\sin z) = \ln |\sec z + \operatorname{tg} z| - \frac{1}{\sin z} + C = \\ &= \ln |\sec z + \operatorname{tg} z| - \operatorname{cosec} z + C. \end{aligned}$$

Теперь необходимо перейти от вспомогательной переменной z к заданной переменной x . Если непосредственно подставлять в первообразную значение $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}}$, то получится громоздкое и сложное вы-

ражение. В таких случаях весьма удобно пользоваться прямоугольным треугольником.

Пусть в этом треугольнике (рис. 12.7) один из катетов равен $\sqrt{5}$; обозначая другой катет через x , а противолежащий ему острый угол через z , получим $x = \sqrt{5} \operatorname{tg} z$. Тогда гипотенуза треугольника равна $\sqrt{5+x^2}$, $\sin z = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}}$, $\cos z = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5+x^2}}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{\sqrt{5+x^2}}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{cosec} z = \frac{1}{\sin z} = \frac{\sqrt{5+x^2}}{x}$.

Поэтому неопределенный интеграл равен

$$\ln |\sec z + \operatorname{tg} z| - \operatorname{cosec} z + C = \ln \left| \sqrt{\frac{5+x^2}{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| - \frac{\sqrt{5+x^2}}{x} + C.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_3^5 \frac{\sqrt{5+x^2}}{x^2} dx &= \left[\ln \left| \sqrt{\frac{5+x^2}{5}} + \frac{x}{\sqrt{5}} \right| - \frac{5+x^2}{x} \right]_3^5 = \\ &= \ln \left| \sqrt{\frac{30}{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} \right| - \frac{30}{5} - \ln \left| \sqrt{\frac{14}{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}} \right| + \frac{14}{3} = \\ &= \ln |\sqrt{6} + \sqrt{5}| - 6 - \ln |\sqrt{2,8} + 0,6\sqrt{5}| + 4\frac{2}{3} \approx \\ &\approx \ln (2,449 + 2,236) - 6 - \ln (1,673 + 1,342) + 4,667 \approx \\ &\approx 2,303 \lg 4,685 - 6 - 2,303 \lg 3,015 + 4,667 \approx 5,07. \end{aligned}$$

Упражнения

Методом подстановки вычислить следующие определенные интегралы:

1. $\int_0^2 x e^x dx.$

Отв. $1 + e^2.$

2. $\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}.$

Отв. $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2x dx.$

Отв. $\pi/4.$

4. $\int_1^2 \ln x dx.$

Отв. $\ln 4 - 1.$

5. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}.$

Отв. $\ln \frac{4}{3}.$

6. $\int_0^4 \frac{dz}{1+\sqrt{z}}.$

Отв. $4 - 2 \ln \sqrt{3}.$

7. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t}.$

Отв. $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$8. \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx.$$

Отв. 11/6.

$$9. \int_9^{16} \frac{3\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} dx$$

Отв. $\frac{54 - \ln 3}{\ln 3}$

$$10. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx.$$

Указание. Принять $\cos x = t$.

Отв. 1/3.

$$11. \int_0^{\pi} \frac{dx}{3 + 2 \cos x}.$$

Указание. Принять $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Отв. $\pi / \sqrt{5}$.

$$12. \int_1^4 \frac{x dx}{\sqrt{4x+2}}.$$

Указание. Принять $4x+2 = t$.

Отв. $\frac{3}{2} \sqrt{2}$.

$$13. \int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Указание. Принять $x = 1/t$.

Отв. $\ln \frac{3}{2}$.

$$14. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{6 - 5 \sin x + \sin^2 x}.$$

Указание. Принять $\sin x = t$.

Отв. $\ln \frac{4}{3}$.

Доказать, что:

$$15. \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

$$16. \int_0^a f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x^2) dx.$$

3. Интегрирование по частям. Формула дифференциала произведения функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеет вид

$$d(uv) = u dv + v du,$$

откуда

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Интегрируя полученное равенство в пределах от a до b , имеем

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (12.33)$$

Поскольку $dv = v' dx$, $du = u' dx$, то формулу (12.33) можно записать также в виде

$$\int_a^b uv' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx. \quad (12.34)$$

Пример 1. Вычислить $\int_0^1 \arcsin x dx$.

Решение. Пусть $u = \arcsin x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = x$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница, находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arcsin x \, dx &= x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= 1 \cdot \arcsin 1 - 0 \cdot \arcsin 0 + \sqrt{1-x^2} \Big|_0^1 = \\ &= 1 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 + \sqrt{1-1} - \sqrt{1-0^2} = \frac{\pi}{2} - 1. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 x e^x \, dx$.

Решение. Положим $u = x$, $dv = e^x \, dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$. Следовательно,

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx = e - e^x \Big|_0^1 = e - e + e^0 = 1.$$

Упражнения

Вычислить следующие определенные интегралы:

1. $\int_2^3 x^2 \ln x \, dx$.

Отв. $9 \ln 3 - \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{19}{9}$.

2. $\int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx$.

Отв. $\frac{1+e^{\pi}}{2}$.

3. $\int_0^1 x \arctg x \, dx$.

Отв. $\pi/4 - 1/2$.

4. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} \, dx$.

Отв. $\frac{15}{256} - \frac{\ln 2}{64}$.

5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{tg}^2 x \, dx$.

Отв. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi^2}{32}$.

6. $\int_1^e \ln^2 x \, dx$.

Отв. $e - 2$.

7. $\int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx$.

Отв. $\pi^2/4 - 2$.

8. $\int_3^4 \frac{dx}{x \sqrt{25-x^2}}$.

Отв. $\frac{1}{5} \ln \frac{3}{2}$.

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sin 2x \, dx$.

Отв. $0,429 \dots$

10. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Отв. $\pi/12 - \sqrt{3}/8$.

§ 7. ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формулой Ньютона—Лейбница, устанавливающей связь между определенным и неопределенным интегралами, можно воспользоваться не во всех практических случаях, так как не всегда удастся найти первообразную функцию $F(x)$ для данной подынтегральной функции $f(x)$. Между тем, решение многих задач приводится к интегралам, которые не берутся в конечном виде, т. е. не могут быть выражены никакой конечной комбинацией элементарных функций; таковы, например, интегралы вида

$$\int \cos \sqrt{x} dx, \int \sin \sqrt{x} dx, \int e^{x^2} dx, \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

и многие другие. Кроме того, встречаются интегралы, которые хотя и берутся, но их точное выражение очень сложно и требует большого объема вычислений, что с практической точки зрения не всегда оправдано. Часто встречаются интегралы, у которых подынтегральная функция неизвестна. Так, чтобы вычислить площадь, ограниченную кривой, осью Ox и двумя ординатами, надо

вычислить $\int_a^b y dx$, где y —переменная ордината кривой, однако во многих случаях уравнение данной кривой может быть неизвестным. Поэтому очень важно во всех этих случаях вычислить определенный интеграл приближенно и притом сравнительно простыми способами.

Приближенные методы вычисления определенного интеграла основаны на том, что определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, отрезком $[a, b]$ оси абсцисс и вертикальными прямыми, проходящими через точки $x=a$ и $x=b$. Кривая $y=f(x)$ заменяется более простой кривой и площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближенное значение искомого интеграла.

Рассмотрим наиболее часто используемые методы приближенного интегрирования:

- 1) метод прямоугольников;
- 2) метод трапеций;
- 3) метод парабол (метод Симпсона).

1. Метод прямоугольников. Площадь криволинейной трапеции A_1ABV_1 , равновеликая площади прямоугольника $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 12.8), выражается интегралом

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) f(c),$$

где $f(c)$ —высота прямоугольника $A_1A_2B_2B_1$, являющаяся значением подынтегральной функции в некоторой промежуточной точке

$c (a < c < b)$. Так как практически трудно найти то значение c , при котором $(b-a)f(c)$ в точности равнялось бы $\int_a^b f(x) dx$, то берем какое-нибудь произвольное c , например, в середине отрезка AB , и тогда получим приближенную формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a)f(c). \quad (12.35)$$

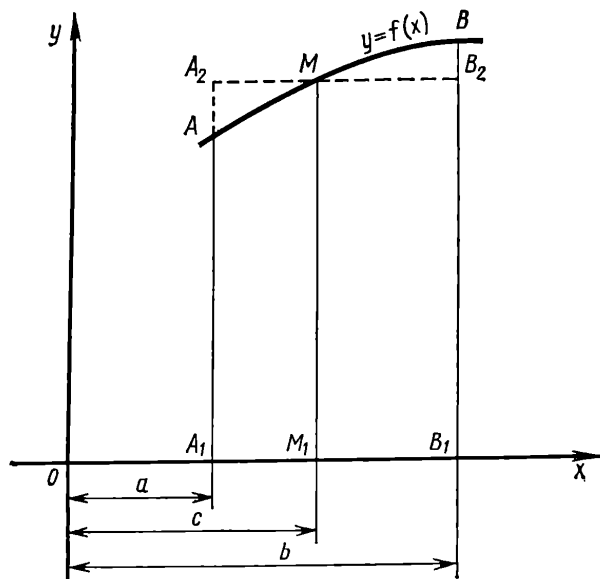


Рис. 12.8

Для получения более точного результата отрезок $[a, b]$ нужно разделить на n частей ординатами, отстоящими друг от друга на равное расстояние h (рис. 12.9) так, что $h = \frac{b-a}{n}$, и провести промежуточные ординаты $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$, соответствующие значениям аргумента $a+h, a+2h, \dots, a+(n-1)h$. Криволинейная трапеция A_1ABB_1 в этом случае разделится на ряд криволинейных трапеций, площади которых приближенно равны площадям прямоугольников с основаниями h и высотами $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ (рис. 12.10). Тогда, согласно равенству (12.35), получим следующие формулы:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) \text{ (с недостатком); } (12.36)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \text{ (с избытком). } (12.37)$$

Эти формулы называются *формулами прямоугольников*.

Значения $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ можно вычислить из уравнения подынтегральной функции $y = f(x)$, подставив последовательно соответствующие значения аргументов $a, a+h, a+2h, \dots, b$.

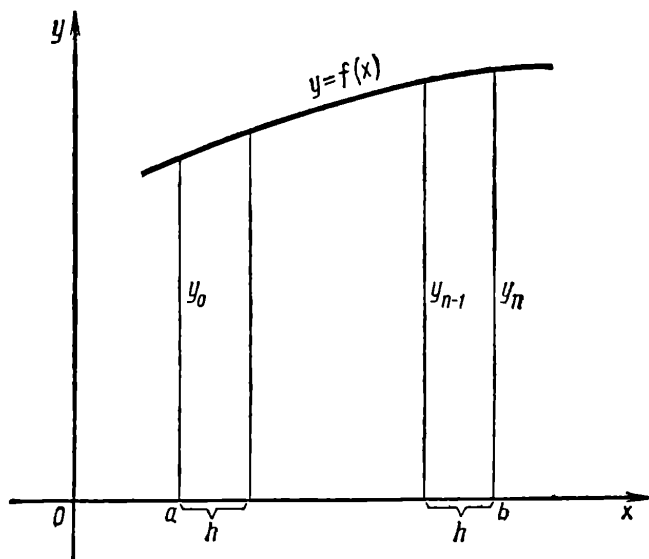


Рис. 12..9

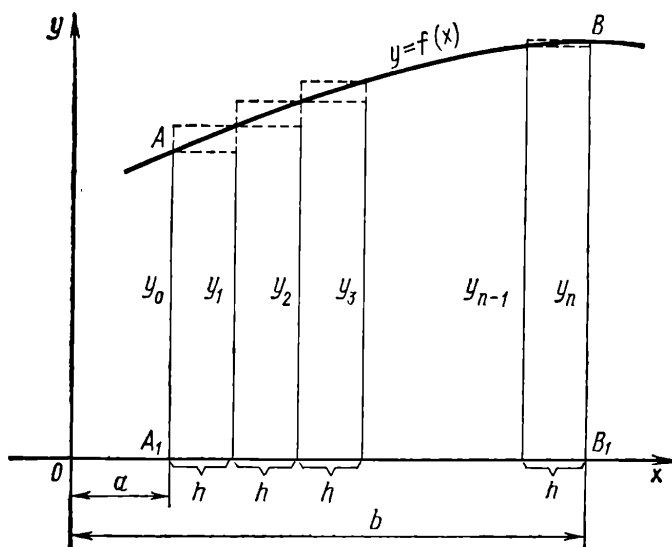


Рис. 12.10

Если функция $y = f(x)$ задана графически, то значения $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ можно определить непосредственно из чертежа. С увеличением n результат будет более точным. Вычисления по способу прямоугольников довольно приближенны.

Пример. Вычислить по формуле прямоугольников $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

Решение. Разделим интервал интегрирования на 10 частей, тогда $n = 10$; $b - a = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$; $\frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{20} \approx 0,1571$. По таблице натуральных значений тригонометрических функций находим с точностью до 0,0001 значения синусов, соответствующие точкам деления аргумента:

$$\begin{aligned} y_0 &= \sin 0^\circ = 0,0000, \\ y_1 &= \sin \frac{\pi}{20} = \sin 9^\circ = 0,1564, \\ y_2 &= \sin \frac{\pi}{10} = \sin 18^\circ = 0,3090, \\ y_3 &= \sin \frac{3\pi}{20} = \sin 27^\circ = 0,4540, \\ y_4 &= \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = 0,5878, \\ y_5 &= \sin \frac{\pi}{4} = \sin 45^\circ = 0,7071, \\ y_6 &= \sin \frac{3\pi}{10} = \sin 54^\circ = 0,8090, \\ y_7 &= \sin \frac{7\pi}{20} = \sin 63^\circ = 0,8910, \\ y_8 &= \sin \frac{2\pi}{5} = \sin 72^\circ = 0,9511, \\ y_9 &= \sin \frac{9\pi}{20} = \sin 81^\circ = 0,9877, \\ y_{10} &= \sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1,0000. \end{aligned}$$

Применяя формулу прямоугольников (с недостатком), получаем приближенное значение искомого интеграла

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin x dx &\approx 0,1571 (0,0000 + 0,1564 + 0,3090 + 0,4540 + 0,5878 + \\ &+ 0,7071 + 0,8090 + 0,8940 + 0,9511 + 0,9877) \approx 0,9195 = I_{\text{прибл.}} \end{aligned}$$

Точное значение этого интеграла, найденное по формуле Ньютона — Лейбница,

$$I_{\text{точн}} = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1.$$

Геометрическая интерпретация задачи приведена на рис. 12.11.

Таким образом, по формуле прямоугольников получается значение интеграла с относительной погрешностью

$$\Delta = \frac{I_{\text{прибл}} - I_{\text{точн}}}{I_{\text{точн}}} \cdot 100\% = \frac{0,9195 - 1,0000}{1,0000} \cdot 100\% = -8,05\%.$$

Знак минус указывает на то, что площадь в данном случае вычислена с недостатком.

2. Метод трапеций. Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x) dx$. Геомет-

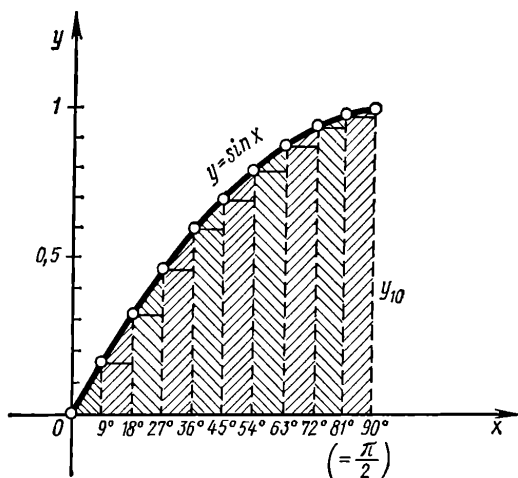


Рис. 12.11

рически определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции A_1ABB_1 (рис. 12.12). Таким образом, вычисление интеграла можно заменить вычислением указанной площади $S_{A_1ABB_1}$. Заменим дугу AB хордой AB и вместо площади криволинейной трапеции вычислим площадь прямолинейной трапеции, которая ей приблизительно равна. Площадь прямолинейной трапеции

$$S = \frac{\overline{AA_1} + \overline{B_1B}}{2} \cdot \overline{A_1B_1}.$$

Ордината $\overline{A_1A} = f(a)$. Обозначим это частное значение функции через y_0 . Ордината $\overline{B_1B} = f(b)$. Обозначим это частное значение функции через y_1 . Высота $\overline{A_1B_1} = b - a$, площадь $S = \int_a^b f(x) dx$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)],$$

или

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \\ &\approx \frac{b-a}{2} (y_0 + y_1). \end{aligned} \quad (12.38)$$

Последняя формула называется *малой формулой трапеций*. Чтобы получить более точный результат, разобьем площадь криволинейной трапеции S на n площадей ординатами, отстоящими друг от друга на равное расстояние h . Обозначим элементарные площади соответственно через $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$. Тогда

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n.$$

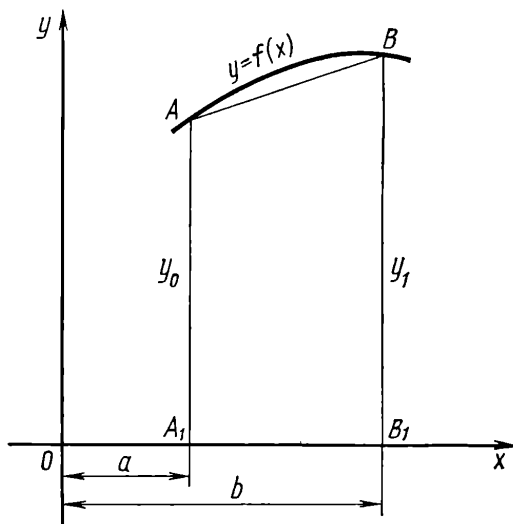


Рис. 12.12

По малой формуле трапеций имеем

$$\begin{aligned} S_1 &\approx \frac{h}{2} (y_0 + y_1), \quad S_2 \approx \frac{h}{2} (y_1 + y_2), \\ S_3 &\approx \frac{h}{2} (y_2 + y_3), \quad \dots, \quad S_{n-1} \approx \frac{h}{2} (y_{n-2} + y_{n-1}), \\ S_n &\approx \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n). \end{aligned}$$

Следовательно, вся площадь криволинейной трапеции

$$S \approx \frac{h}{2} (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + y_3 + \dots + y_{n-2} + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n),$$

или

$$S \approx h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Так как $h = \frac{b-a}{n}$ и $S = \int_a^b f(x) dx$, то окончательно имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right), \quad (12.39)$$

где $y_0, y_1, \dots, y_n$ — значения подынтегральной функции, соответствующие значениям аргумента $a, a+h, a+2h, \dots, b$.

Эта формула называется *большой формулой трапеций*.

Пример. Вычислить по формуле трапеций $\int_0^4 (3x^2 + 4x + 2) dx$, разбивая отрезок интегрирования на четыре равные части. Вычислить по формуле Ньютона—Лейбница точное значение интеграла и найти относительную погрешность Δ в процентах.

Решение. 1. В данном случае $a=0, b=4, n=4, (b-a)/n=1$. Производим вычисления:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 3 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 + 2 = 2; \\ x_1 &= 1, & y_1 &= 3 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 + 2 = 9; \\ x_2 &= 2, & y_2 &= 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 2 = 22; \\ x_3 &= 3, & y_3 &= 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 2 = 41; \\ x_4 &= 4, & y_4 &= 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 + 2 = 66. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^4 (3x^2 + 4x + 2) dx &= 1 \cdot \left(\frac{2}{2} + 9 + 22 + 41 + \frac{66}{2} \right) = \\ &= 1 + 9 + 22 + 41 + 33 = 106. \end{aligned}$$

2. Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_0^4 (3x^2 + 4x + 2) dx = \left(\frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 2x \right) \Big|_0^4 = (x^3 + 2x^2 + 2x) \Big|_0^4 = 4^3 + 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 = 64 + 32 + 8 = 104.$$

3. Найдем относительную погрешность в процентах:

$$\Delta = \frac{106 - 104}{104} \cdot 100\% = \frac{100}{52}\% = 1,92\%.$$

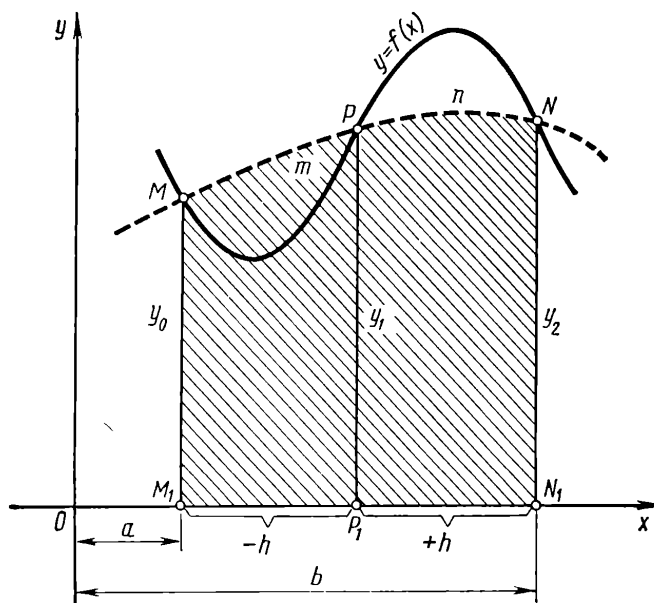


Рис. 12.13

3. Способ парабол (формулы Симпсона). Пусть надо вычислить

$\int_a^b f(x) dx$. Рассматриваемый способ заключается в том, что график подынтегральной функции заменяется параболой (рис. 12.13) с вертикальной осью, проходящей через три точки M , N и P кривой MN , причем проекция точки P на ось Ox (точка P_1) делит отрезок M_1N_1 пополам. Вместо площади, ограниченной кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и двумя ординатами $x=a$ и $x=b$, вычислим площадь, ограниченную параболой, осью абсцисс и теми же ординатами. Эта площадь приближенно равна интегралу $\int_a^b f(x) dx$. Пусть уравнение параболы, проходящей через точки M , N и P , имеет вид

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

где A , B и C — неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Перенесем начало координат в точку P (в результате чего ординаты точек кривой не изменятся) и обозначим величину отрезка $[a, b]$ через $2h$, т. е. основание трапеции разделим на четное число равных частей. Тогда площадь S криволинейной трапеции $M_1MmnNN_1M_1$ равна

$$S \approx \int_{-h}^{+h} (Ax^2 + Bx + C) dx = \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx \right]_{-h}^{+h} = \\ = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch + \frac{Ah^3}{3} - \frac{Bh^2}{2} + Ch = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch,$$

или

$$S \approx \frac{h}{3} (2Ah^2 + 6C). \quad (12.40)$$

Вычислим выражение, заключенное в скобках. Обозначим ординаты точек M , P и N соответственно через y_0 , y_1 и y_2 , тогда координаты точек $M(-h; y_0)$, $P(0; y_1)$, $N(h; y_2)$. Так как эти точки лежат на кривой $y = f(x)$ и на параболе $y = Ax^2 + Bx + C$, то их координаты удовлетворяют уравнению параболы:

$$\begin{aligned} y_0 &= Ah^2 - Bh + C, \\ y_1 &= C, \\ y_2 &= Ah^2 + Bh + C. \end{aligned}$$

Умножая первое и третье из уравнений на 1, а второе на 4 и складывая, получим искомое выражение:

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C.$$

Подставляя это значение в приближенное равенство (12.40), имеем

$$S \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Так как

$$h = \frac{b-a}{2}, \quad S = \int_a^b f(x) dx,$$

то окончательно имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (12.41)$$

Формула (12.41) называется *малой формулой Симпсона*. Значения ординат y_0 , y_1 , y_2 вычисляют так же, как в формуле трапеций (это значения подынтегральной функции $y = f(x)$, соответствующие значениям аргумента a , $a+h$, b).

Можно получить более точные результаты. Интеграл $\int_a^b f(x) dx$

численно равен площади криволинейной трапеции $A_1ABB_1A_1$ (рис. 12.14):

$$\int_a^b f(x) dx = S_{A_1ABB_1A_1}.$$

Разобьем площадь S ординатами, отстоящими друг от друга на равное расстояние $2h$, на n площадей, состоящих каждая из двух полос. Таких полос, очевидно, будет $2n$. Обозначим ординаты соответствующих точек через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}$, а площади—через $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}, S_n$. Тогда

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n.$$

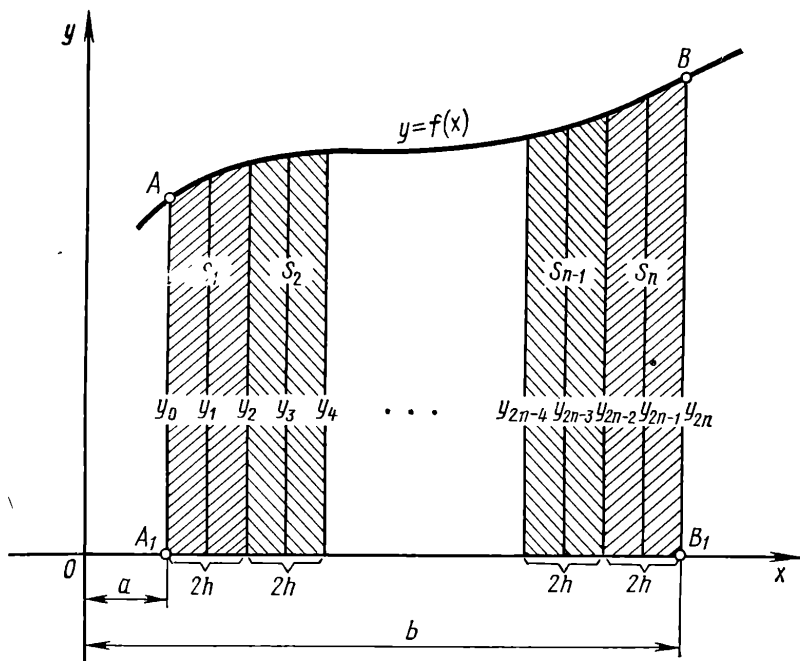


Рис. 12.14

По малой формуле Симпсона находим:

$$S_1 \approx \frac{1}{n} \frac{b-a}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2),$$

$$S_2 \approx \frac{1}{n} \frac{b-a}{6} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

$$S_3 \approx \frac{1}{n} \frac{b-a}{6} (y_4 + 4y_5 + y_6),$$

...

$$S_{n-1} \approx \frac{1}{n} \frac{b-a}{6} (y_{2n-4} + 4y_{2n-3} + y_{2n-2}),$$

$$S_n \approx \frac{1}{n} \frac{b-a}{6} (y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}).$$

Складывая, замечаем, что ординаты с четными индексами (кроме первой и последней) удваиваются, а ординаты с нечетными индексами — увеличиваются в четыре раза. Принимая во внимание, что

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = S = \int_a^b f(x) dx,$$

имеем

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} [y_0 + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + y_{2n}]. \quad (12.42)$$

Формула (12.42) называется *большой формулой Симпсона*.

При применении формулы Симпсона (в целях уменьшения погрешности) рекомендуется найти предварительно максимумы, минимумы и точки перегиба функции, разбить интервал интегрирования на ряд участков, в каждом из которых функция монотонна и график ее обращен выпуклостью в одну сторону, и лишь после этого к каждому из участков применить формулу приближенного интегрирования.

Пример. Вычислить $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, полагая $n=2$.

Решение. Применяя формулу Симпсона (12.42), имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1-0}{6 \cdot 2} [y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4]. \quad (*)$$

Вычислим ординаты подынтегральной функции $y=f(x)=1/(1+x^2)$, соответствующие значениям аргумента 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1: $y_0=f(0)=1$,

$$y_1=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{16}{17}, \quad y_2=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}, \quad y_3=f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{16}{25}, \quad y_4=f(1)=\frac{1}{2}.$$

Подставляя найденные значения в формулу (*), получаем

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{12} \left[1 + 4\left(\frac{16}{17} + \frac{16}{25}\right) + 2 \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right] = 0,78539.$$

Вычислим точное значение данного определенного интеграла:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4} = 0,78540.$$

Абсолютная погрешность

$$\Delta = 0,78540 - 0,78539 = 0,00001.$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{0,00001}{0,78540} \cdot 100\% = 0,00127\%.$$

Этот пример показывает, что большая формула Симпсона дает хорошее приближение к истинной величине интеграла.

Упражнения

1. Вычислить по формуле прямоугольников следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^4 x^2 dx$ при $n = 10$ с точностью до 0,01.

Отв. 18,24;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ при $n = 10$ с точностью до 0,001.

Отв. 0,719;

в) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ при $n = 10$ с точностью до 0,001.

Отв. 0,710.

2. Вычислить по формуле трапеций следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ при $n = 10$ с точностью до 0,0001.

Отв. 0,9981;

б) $\int_2^3 \frac{dx}{x}$ при $n = 4$ с точностью до 0,0001.

Отв. 0,4055;

в) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{x} dx$ при $n = 5$ с точностью до 0,001.

Отв. 0,758;

г) $\int_1^{11} \frac{dx}{x}$ при $n = 10$ с точностью до 0,001.

Отв. 2,474;

д) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ при $n = 5$ с точностью до 0,001.

Отв. 0,524.

3. Вычислить по формуле парабол с точностью до 0,001 следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$, приняв $2n = 10$.

Отв. 1,371;

$$\text{б) } \int_2^3 \frac{dx}{x}, \text{ приняв } 2n=4.$$

Отв. 0,405;

$$\text{в) } \int_0^{0,8} \cos x \, dx, \text{ приняв } 2n=10.$$

Отв. 0,717;

$$\text{г) } \int_0^4 x^2 \, dx, \text{ приняв } 2n=10.$$

Отв. 21,333.

§ 8. СВЯЗЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЙ

В заключение рассмотрим связь между производной функции, неопределенным и определенным интегралами.

Пусть дана непрерывная и дифференцируемая функция

$$y = F(x) + C, \quad (12.43)$$

где C — постоянная.

Задачей дифференциального исчисления является определение производной или дифференциала этой функции, т. е. необходимо найти производную

$$y' = [F(x) + C]' = F'(x) = f(x) \quad (12.44)$$

или дифференциал

$$dy = f(x) \, dx \quad (12.45)$$

данной функции (12.43).

График производной $y' = f(x)$ показан на рис. 12.15, а (на пунктирном фоне образующих ее семейства функций) для частного случая, когда исходные функции $F(x) + C = \frac{x^3}{3} + C$, а их производная $y' = f(x) = x^2$.

Обратной задачей данной (задачей интегрального исчисления) является определение по данной функции (т. е. по производной $y' = f(x)$) первообразной $F(x)$, продифференцировав которую получим опять данную функцию $f(x)$. Так как при дифференцировании производная постоянной величины равна нулю, то таких первообразных бесконечно много и они образуют семейство интегральных кривых $F(x) + C$, поскольку решая обратную задачу, выполнением операцию интегрирования

$$\int dy = \int f(x) \, dx, \quad (12.46)$$

откуда опять получаем

$$y = F(x) + C.$$

Семейство кривых (12.43) для частного случая $F(x) + C = \frac{x^3}{3} + C$ представлено на рис. 12.15, б. Стрелками условно обозначены

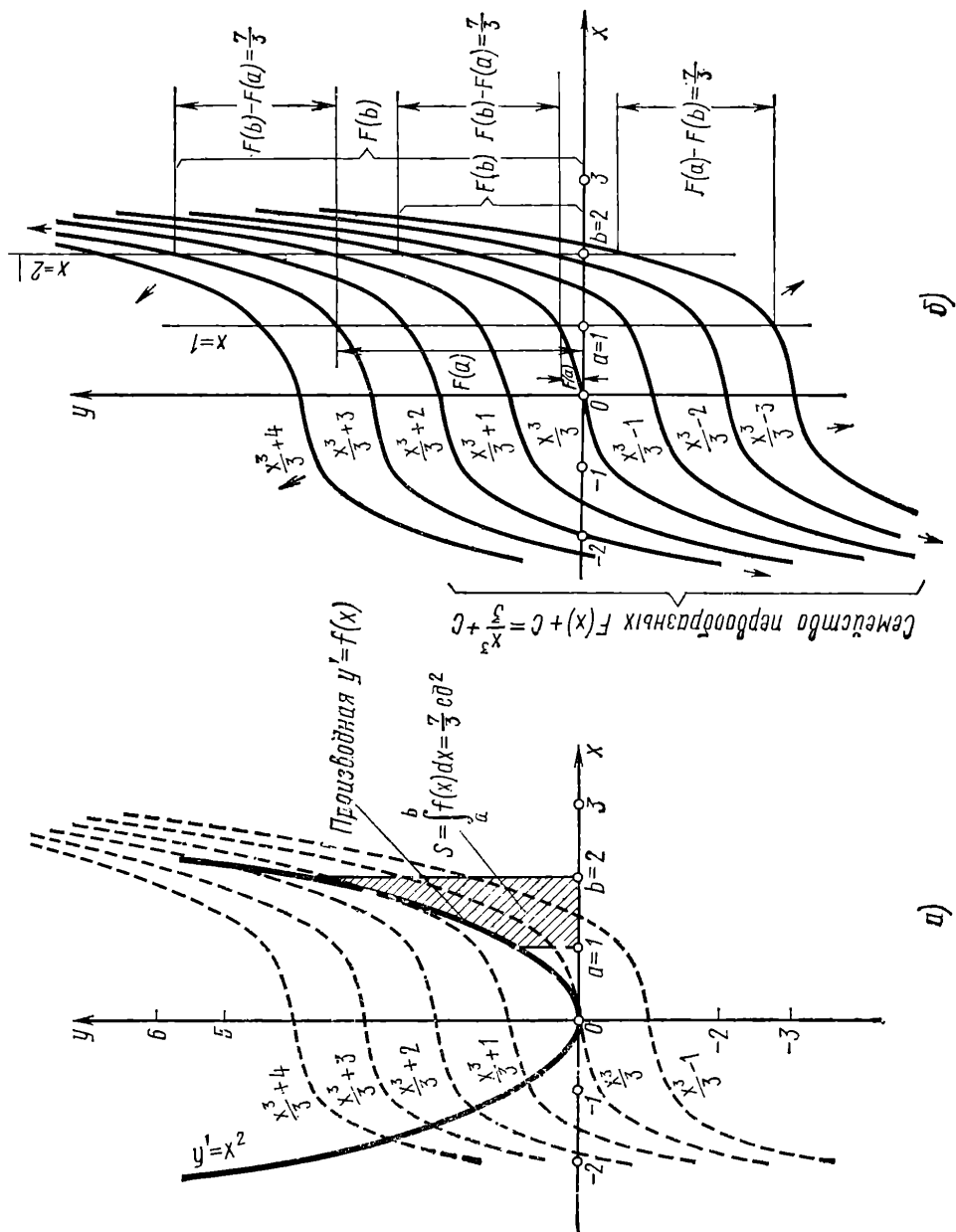


Рис. 12.15

направления распространения данного семейства интегральных кривых по всем направлениям координатной плоскости.

Поставим задачу найти площадь S криволинейной трапеции, заключенной между участком кривой $f(x)$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком $[a, b]$, расположенным на оси абсцисс, т. е. найти определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$. Графически для частного случая $f(x)=x^2$ это представлено на рис. 12.15, а при $a=1$ и $b=2$. Числовое значение этого определенного интеграла по формуле Ньютона—Лейбница составляет

$$\int_a^b f(x) dx = \int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Следовательно, искомая площадь S криволинейной трапеции равна $7/3$ кв. ед. масштаба. Это соответствие легко проверяется графически на рис. 12.15, а.

Рассматриваемый отрезок интегрирования $[a, b]$ перенесем на рис. 12.15, б и в концах отрезка $x=a$ и $x=b$ проведем прямые, параллельные оси ординат, которые в бесконечном множестве точек пересекут семейство первообразных функций $F(x)+C$. При этом разность значений первообразных $F(b)-F(a)=\text{const}=I$ выше оси абсцисс будет, как это видно из рис. 12.15, б, для всех кривых семейства постоянной и равной I , где I численно представляет определенный интеграл. Соответственно ниже оси абсцисс будет сохраняться постоянная разность $F(a)-F(b)$, равная также I . Определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (12.47)$$

в нашем частном случае при $a=1$, $b=2$, как уже вычислялось, равен $7/3$. Сравнивая это вычисленное значение определенного интеграла с величиной $I=F(b)-F(a)$ на рис. 12.15, б в масштабе для кривых семейства $x^3/3+C$, замечаем полное соответствие различных разностей $F(b)-F(a)$ величине $7/3$.

Таким образом, на рис. 12.15 представлена полная взаимосвязь производной функции, неопределенного интеграла и определенного интеграла.

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

В определенном интеграле $\int_a^b f(x) dx$ промежуток интегрирования $[a, b]$ предполагался конечным, а функция $f(x)$ — непрерывной. Если интервал интегрирования бесконечен, полубесконечен или функция имеет в интервале интегрирования точки разрыва, то понятие определенного интеграла теряет смысл. Однако часто бывает необходимо понятие определенного интеграла распространить на случаи, когда нарушается конечность промежутка интегрирования или ограниченность подынтегральной функции. В таких случаях понятие определенного интеграла расширяется при помощи еще одного предельного перехода. Интегралы, получаемые двукратным переходом к пределу, называются *несобственными*. Несобственные интегралы подразделяются на два класса: интегралы с бесконечными пределами и интегралы от разрывных функций.

§ 2. ИНТЕГРАЛЫ ПО БЕСКОНЕЧНОМУ ИНТЕРВАЛУ

1. Определение интеграла с бесконечными пределами. Пусть функция $f(x)$ определена в промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема в любом конечном отрезке $[a, b]$, так что $\int_a^b f(x) dx$ имеет смысл при любом $b > a$. Если при $b \rightarrow \infty$ для этого определенного интеграла существует конечный предел, то его называют *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* функции $f(x)$ в промежутке $[a, +\infty)$ и обозначают символом

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (13.1)$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл *существует* или *сходится*. Если конечного предела для определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ при $b \rightarrow \infty$ не существует, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *не существует* или *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с нижним бесконечным пределом:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (13.2)$$

Несобственный интеграл с бесконечными пределами определяется так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx. \quad (13.3)$$

В последнем случае

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx,$$

где c —любое фиксированное число. Существование каждого из несобственных интегралов справа равносильно существованию несобственного интеграла слева.

Пример. Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx$.

Решение. Функция $f(x) = 2^{-x}$ интегрируема на любом конечном отрезке $[0, b]$, $b > 0$, поэтому

$$\int_0^b 2^{-x} dx = \frac{1}{\ln 2} (-2^{-x}) \Big|_0^b = \frac{1}{\ln 2} (-2^{-b} + 2^0) = \frac{1}{\ln 2} \left(1 - \frac{1}{2^b}\right).$$

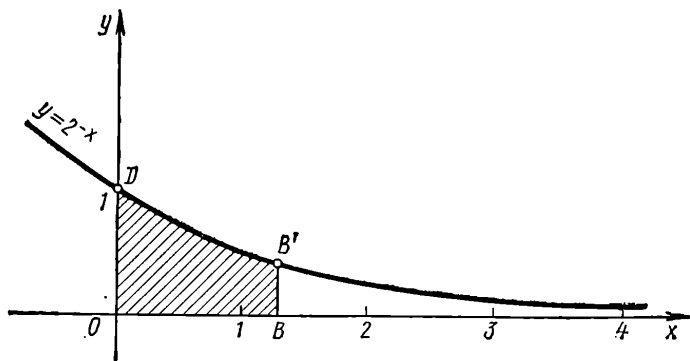


Рис. 13.1

Для этого интеграла при $b \rightarrow +\infty$ существует конечный предел

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln 2} \left(1 - \frac{1}{2^b}\right) = \frac{1}{\ln 2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^b}\right) = \frac{1}{\ln 2} \left(1 - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^b}\right) = \frac{1}{\ln 2} (1 - 0) = \frac{1}{\ln 2},$$

следовательно, несобственный интеграл сходится и по определению имеем

$$\int_0^{+\infty} 2^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b 2^{-x} dx = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,4.$$

Определенный интеграл $\int_0^b 2^{-x} dx$ численно равен площади $OBB'DO$ под линией $y = 2^{-x}$ (рис. 13.1). По мере удаления ординаты BB' вправо площадь криволинейной трапеции $OBB'DO$ будет увеличиваться, но не безгранично, а стремиться к определенному пределу 1,4. Этот результат означает следующее: величина площади полубесконечной полосы, ограниченной кривой $y = 1/2^x$, асимптотически приближающейся к оси Ox , осью абсцисс и крайней левой ординатой, равна 1,4 кв. ед.

В приведенном примере сначала вычислялся определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ с помощью первообразной функции, а затем предел при $b \rightarrow \infty$. Оба эти действия можно объединить. Так как несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом определяется равенством

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(x) \Big|_a^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [F(b) - F(a)] = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - \lim_{b \rightarrow +\infty} F(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a), \end{aligned}$$

то несобственный интеграл существует только в том случае, если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = F(+\infty)$. Тогда

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}.$$

Аналогично имеем

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - F(-\infty).$$

Возможность вычисления двойной подстановки, обусловленная существованием и конечностью фигурирующего в ней предела, свидетельствует о существовании несобственного интеграла.

2. Признаки сходимости несобственных интегралов. Перед непосредственным вычислением несобственного интеграла необходимо выяснить, сходится он или расходится. Приведем признаки сходимости несобственных интегралов, основанные на сравнении данного несобственного интеграла с другим несобственным интегралом, сходимость или расходимость которого известна. Ограничимся при этом положительными функциями.

Интеграл $\int_a^b f(x) dx$ есть монотонно возрастающая функция b ,

т. е. с увеличением b увеличивается значение этого определенного интеграла и при $b \rightarrow +\infty$ возможны два случая:

1) интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится и тогда

$$\int_a^b f(x) dx < +\infty; \quad (13.4)$$

2) интеграл расходится и тогда

$$\int_a^b f(x) dx = +\infty. \quad (13.5)$$

Для доказательства сходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$ достаточно убедиться в том, что при любом b его значение ограничено сверху некоторым положительным числом, не зависящим от b .

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если при $x \geq a$ имеет место неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$, то из сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Доказательство. Если в каждой точке отрезка $[a, b]$ соблюдается неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx,$$

что вытекает из геометрического смысла этих определенных интегралов. Пусть несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ сходится и равен A .

Тогда при любом b

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx = A$$

и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Следствие 1. Если $f(x) \geq \varphi(x)$ при $x \geq a$, то из расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует расходимость интеграла

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Так как

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{a_0} f(x) dx + \int_{a_0}^{+\infty} f(x) dx,$$

где $a_0 > a$ — любое число, то достаточно предположить справедливость неравенства $f(x) \leq \varphi(x)$ для достаточно больших x (наприм., для $x \geq a_0$, где $a_0 > a$).

Следствие 2. Если существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c > 0$,

то из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ следует сходимость интег-

рала $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости первого интеграла следует рас-

ходимость второго, т. е. оба несобственных интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ и

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Действительно, из существования предела $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = c$ вытекает, что, при достаточно больших x , отношение $\frac{f(x)}{\varphi(x)} < c + 1$, или $f(x) < (c + 1) \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ вытекает

сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} (c + 1) \varphi(x) dx$, поэтому, согласно доказанной теореме, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится.

Аналогично доказывается расходимость.

Выбирая для сравнения конкретную функцию, можно получить частные признаки сходимости или расходимости некоторых несобственных интегралов. Практическое значение имеет при этом сравнение с функцией вида $f(x) = \frac{1}{x^m}$.

Сходимость или расходимость несобственных интегралов с бесконечными пределами часто устанавливается с помощью следующих признаков сходимости.

Несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ($a > 0$) сходится, если

$$|f(x)| \leq \frac{M}{x^m}, \quad m > 1; \quad (13.6)$$

расходится, если

$$|f(x)| \geq \frac{M}{x^m}, \quad m \leq 1 \quad (13.7)$$

(здесь M и m — постоянные).

Пример 1. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Решение. При $x \geq 1$ подынтегральная функция

$$\frac{1}{x^2(1+e^x)} < \frac{1}{x^2},$$

т. е. удовлетворяет неравенству (13.6) при $m=2 > 1$ и $M=1$. Следовательно, рассматриваемый интеграл сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Решение. Так как $\ln x \geq 1$ для всех $x \geq e$, то

$$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \geq \frac{1}{x^{1/3}},$$

т. е. подынтегральная функция удовлетворяет неравенству (13.7) при $m = \frac{1}{3} < 1$ и $M=1$. Следовательно, интеграл расходится.

Доказанные признаки справедливы для положительных функций. При исследовании вопроса о сходимости несобственного интеграла от знакопеременной функции используем признак, который приведем без доказательства.

Если $f(x)$ — *знакопеременная интегрируемая функция* m из сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *вытекает сходимость*

несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. В этом случае несобственный ин-

теграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется *абсолютно сходящимся*.

Из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ не вытекает сходимость ин-

теграла $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$.

Пример 3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$.

Решение. Подынтегральная функция является знакопеременной. Так как $|\cos x| \leq 1$, то $\left| \frac{\cos x}{x^3} \right| \leq \frac{1}{x^3}$, и интеграл от ее абсолютной величины сходится. Несобственный интеграл от функции $\frac{1}{x^3}$ сходится. Следовательно, исследуемый интеграл сходится.

Пример 4. Найти значения показателя m , при которых несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ ($a > 0$) сходится.

Решение. Рассмотрим следующие три случая:

1. При $m > 1$ получаем

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x^m} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{m-1} \cdot \frac{1}{x^{m-1}} \right) \Big|_a^b = \\ &= -\frac{1}{m-1} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right) = \frac{1}{(m-1)a^{m-1}} = \frac{a^{-m+1}}{m-1}, \end{aligned}$$

т. е. интеграл сходится.

2. При $m = 1$ имеем

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln a) = +\infty,$$

т. е. интеграл расходится.

3. При $m < 1$, как в первом случае, получаем

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{m-1} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{b^{m-1}} - \frac{1}{a^{m-1}} \right).$$

Так как в этом случае показатель степени $m-1 < 0$, то $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m} = +\infty$, т. е. конечный предел не существует и интеграл расходится.

Таким образом, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^m}$ сходится при $m > 1$, а при $m \leq 1$ — расходится.

§ 3. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ КОНЕЧНОЕ ЧИСЛО ТОЧЕК РАЗРЫВА

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leq x < b$, и в точке $x=b$ терпит разрыв, в частности, неограниченно возрастает: $f(b) \rightarrow \infty$. Точка b в этом случае называется *особой точкой*.

Если интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет конечный предел,

то его называют несобственным интегралом функции $f(x)$ в интервале от a до b и обозначают так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (13.8)$$

При этом говорят, что интеграл (13.8) существует или сходится, а функцию $f(x)$ называют интегрируемой в промежутке $[a, b]$. В противном случае интеграл не существует или расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость несобственный интеграл

$$\int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Решение. Функция $f(x) = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ непрерывна при $0 \leq x < a$ и имеет бесконечный разрыв в точке $x = a$. Поэтому, в силу равенства (13.8), получаем

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{a-\varepsilon} \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{x}{a} \Big|_0^{a-\varepsilon} = \\ &= a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} - \arcsin \frac{0}{a} \right] = \\ &= a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \frac{a-\varepsilon}{a} = a \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin \left(1 - \frac{\varepsilon}{a} \right) = a \arcsin 1 = \frac{\pi a}{2}. \end{aligned}$$

Для рассматриваемого интеграла существует конечный предел, поэтому интеграл сходится и равен $\frac{\pi a}{2}$.

Пусть подынтегральная функция $f(x)$ имеет особую точку $x = a$, так что $f(a) \rightarrow \infty$. В этом случае несобственный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

и сходимость интеграла определяется существованием конечного предела. Если функция $f(x)$ имеет разрыв в некоторой точке $x = c$ внутри отрезка $[a, b]$, то полагают, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

и существование каждого из несобственных интегралов в правой части равенства равносильно существованию несобственного интеграла в левой части равенства.

Аналогично, если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет внутри этого отрезка конечное число особых точек $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, то полагают, что

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^{a_2} f(x) dx + \dots + \int_{a_n}^b f(x) dx$$

и для существования несобственного интеграла в левой части равенства необходимо существование каждого из несобственных интегралов в правой части.

Пример 2. Исследовать на сходимость интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

Решение. Так как внутри отрезка интегрирования $[-1, 2]$ существует особая точка $x=0$, в которой подынтегральная функция $f(x)=1/x$ имеет бесконечный разрыв, то

$$\int_{-1}^2 \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^2 \frac{dx}{x}.$$

Исследуем на сходимость первый из интегралов, находящихся в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\ln |x| \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln |0-\varepsilon| - \ln |-1|) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - \ln 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \varepsilon - 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \varepsilon = -\infty. \end{aligned}$$

Интеграл расходится, следовательно, расходится и данный несобственный интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

Отыскание первообразной функции для несобственного интеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$ и вычисление предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно объединить. Существование несобственного интеграла (13.1) равносильно существованию предела $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(b-\varepsilon)$, где $F'(x)=f(x)$. Если этот предел существует, то его естественно принять за значение $F(b)$ первообразной функции при $x=b$, достигнув этим непрерывности функции $F(x)$ на всем отрезке $[a, b]$.

Для вычисления интеграла (13.1) используем формулу

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Признаки сходимости несобственных интегралов от разрывных функций аналогичны признакам сходимости несобственных интегралов с бесконечными пределами.

Теорема 1. Если на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общую особую точку $x=b$ и при всех значениях $a \leq x < b$ выполняется неравенство $f(x) \geq \varphi(x) \geq 0$, то из сходимости интеграла $\int_a^b f(x) dx$

вытекает сходимость интеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$, а из расходимости интеграла $\int_a^b \varphi(x) dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Аналогично доказывается, что интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} \varphi(x) dx$ возрастает при стремлении ε к нулю и ограничен сверху значением сходящегося несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Теорема 2. Если $f(x)$ — непрерывная знакопеременная функция, которая при $a \leq x < b$ имеет особую точку $x=b$, то из сходимости интеграла $\int_a^b |f(x)| dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

В этом случае несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется абсолютно сходящимся.

Однако из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ не вытекает его абсолютная сходимость.

Очень часто функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, на практике сравнивают с функциями $1/(b-x)^m$ и $1/(x-a)^m$. В этом случае получаем следующие признаки сходимости и расходимости.

Пусть функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в одном из концов интервала интегрирования (a, b) , например, в особой точке $x=a$. Тогда несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, если

$$|f(x)| \leq \frac{M}{(x-a)^m} \quad \text{при } m < 1, \quad (13.9)$$

и расходится, если

$$|f(x)| \geq \frac{M}{(x-a)^m} \quad \text{при } m \geq 1 \quad (13.10)$$

(здесь m и M — постоянные).

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x+5x^5}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x=0$. Замечаем, что при $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{x+5x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Несобственный интеграл

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \Big|_0^9 = 6$$

и поэтому несобственный интеграл $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x+5x^5}}$ также существует (как интеграл от меньшей функции). Следовательно, данный интеграл сходится.

Возможен другой путь решения. Выражение

$$\frac{1}{\sqrt{x+5x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

удовлетворяет неравенству (13.9) при $m = 1/2 < 1$ и $M = 1$, т. е. данный интеграл сходится.

Отметим, что прежде чем воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница для вычисления определенного интеграла, следует установить, является ли этот интеграл обыкновенным, так как по внешнему виду несобственный интеграл от разрывной функции ничем не отличается от определенного интеграла. Несобственные же интегралы (с бесконечными пределами и от разрывных функций) должны вычисляться на основании приведенных определений.

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Геометрический смысл несобственного сходящегося интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ можно сформулировать так: несобственный сходящийся интеграл с бесконечными пределами численно равен площади бесконечной криволинейной трапеции, которая неограниченно простирается влево и вправо и, вместе с тем, имеет конечную величину (рис. 13.2).

Несобственный интеграл с верхним бесконечным пределом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, если он существует, численно равен площади полубесконечной криволинейной трапеции (рис. 13.3), основание которой бесконечно велико, левая сторона конечна, а правая — неограниченно уменьшается.

Несобственный интеграл с нижним бесконечным пределом $\int_{-\infty}^b f(x) dx$, если он существует, численно равен площади полубесконечной криволинейной трапеции (рис. 13.4), основание которой бесконечно велико, правая сторона конечная, а левая — неограниченно уменьшается.

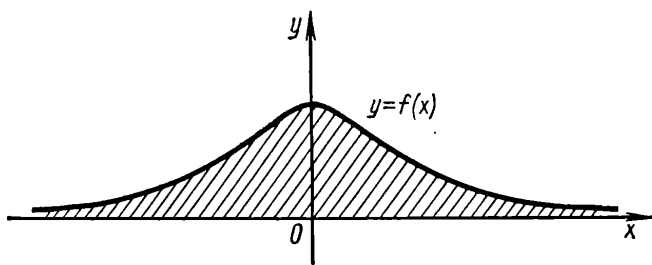


Рис. 13.2

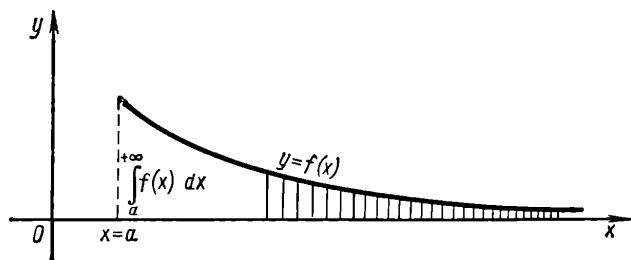


Рис. 13.3

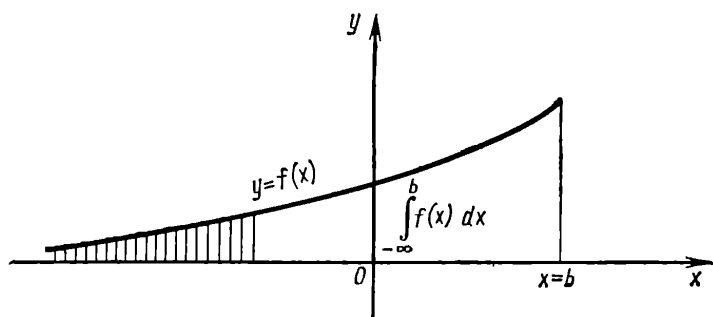


Рис. 13.4

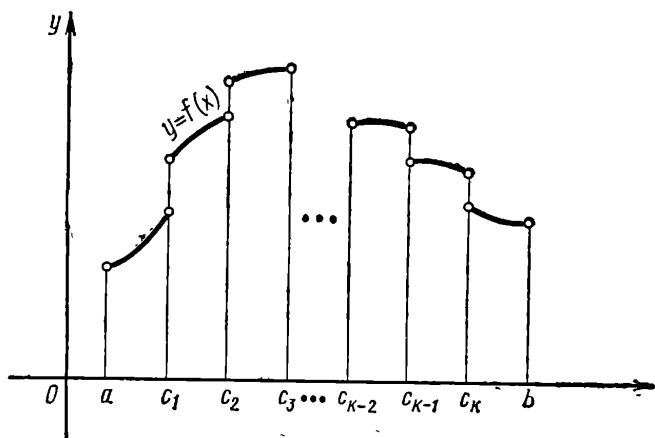


Рис. 13.5

Несобственный интеграл от разрывной функции $f(x)$, имеющей в промежутке $[a, b]$ конечные разрывы во внутренних точках $c_1, c_2, \dots, c_k$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{c_1} f(x) dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx + \dots + \int_{c_k}^b f(x) dx,$$

численно равен сумме площадей отдельных криволинейных трапеций (рис. 13.5).

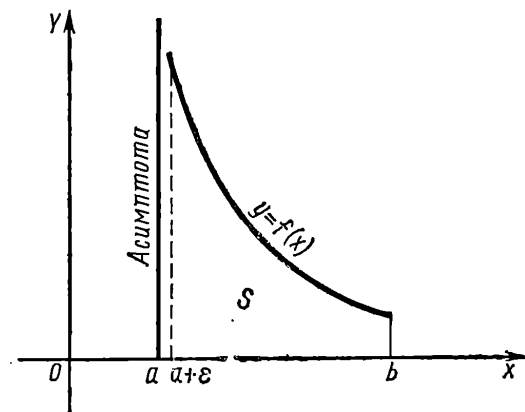


Рис. 13.6

Несобственный интеграл от положительной функции $f(x)$, имеющей бесконечный разрыв в крайней левой точке промежутка $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

численно равен площади бесконечно высокой криволинейной трапеции с правой конечной стороной (рис. 13.6).

Несобственный интеграл от положительной функции $f(x)$, имеющей бесконечный

разрыв в крайней правой точке промежутка $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx,$$

численно равен площади бесконечно высокой криволинейной трапеции с левой конечной стороной (рис. 13.7).

Несобственный интеграл от положительной функции $f(x)$, имеющей бесконечный разрыв во внутренней точке c отрезка $[a, b]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx,$$

численно равен площади фигуры, составленной из двух бесконечно высоких в точке разрыва криволинейных трапеций (рис. 13.8).

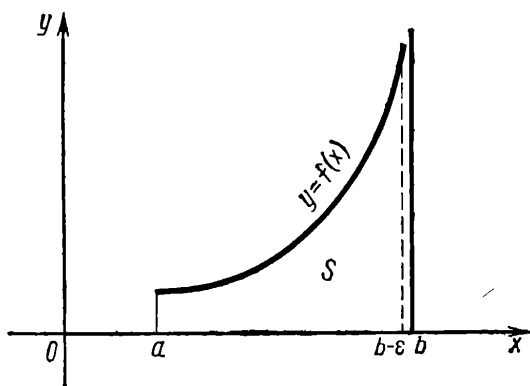


Рис. 13.7

Несобственные интегралы от отрицательных функций, имеющих аналогичные разрывы в указанных точках промежутка $[a, b]$, численно равны площадям аналогичных бесконечных криволинейных трапеций, взятым со знаком минус.

Несобственный интеграл является обобщением понятия определенного интеграла, как с точки зрения бесконечного расширения пределов интегрирования на всю числовую ось, так и с учетом разрывов подынтегральной функции. Это положение иллюстрируется графиком функции $y=f(x)$ на рис. 13.9. В данном случае функция $y=f(x)$ имеет не только бесконечные пределы изменения переменной x , но и обладает точкой разрыва (при $x=0$) и поэтому задача об определении площади фигуры, образованной кривой $y=f(x)$ с осью абсцисс, в рассматриваемом примере сводится к определению несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования от разрывной функции. Из рис. 13.9 очевидно, что определенный интеграл

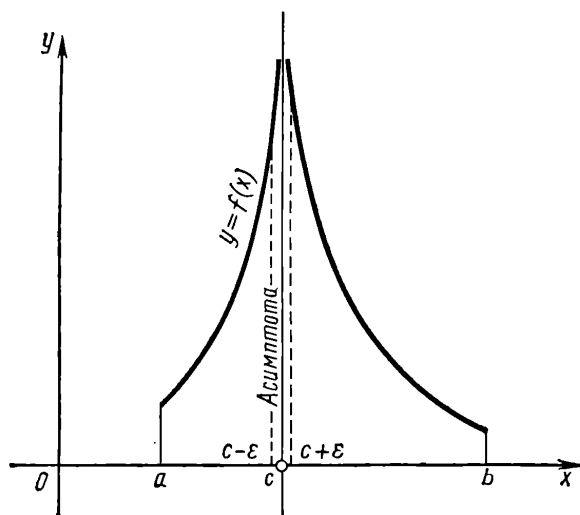


Рис. 13.8

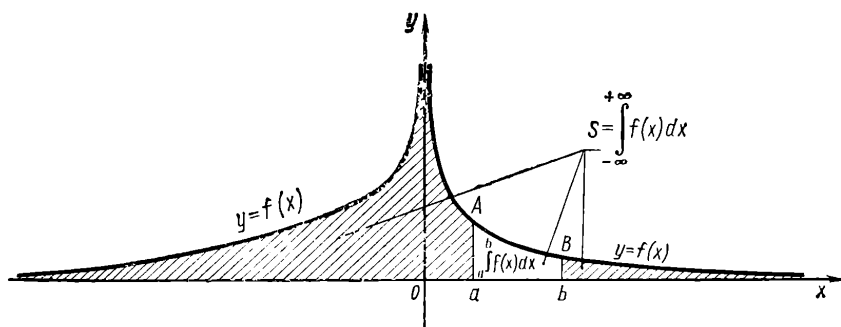


Рис. 13.9

$\int_a^b f(x) dx$ на каком-то частичном отрезке $[a, b]$, являющемся только частью бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, представляется криволинейной трапецией $aABba$, которая составляет лишь долю всей площади заштрихованной фигуры.

Упражнения

Вычислить следующие несобственные интегралы или доказать их расходимость:

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$

Отв. 1.

2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 9}.$

Отв. $\pi/6$.

3. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)x^2}.$

Отв. $1 - \ln 2$.

4. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

Отв. π .

5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

Отв. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

6. $\int_0^{\infty} e^{-ax+b} dx.$

Отв. $1/2$.

7. $\int_0^1 \ln x dx.$

Отв. -1 .

8. $\int_0^8 \frac{dx}{(x-2)^2}.$

Отв. Интеграл расходится.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

§ 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Если на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ непрерывна и положительна, то площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью абсцисс Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 14.1), равна

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (14.1)$$

Если функция $f(x) < 0$ на отрезке $[a, b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx < 0$ и по абсолютной величине равен площади криволинейной трапеции (рис. 14.2), т. е.

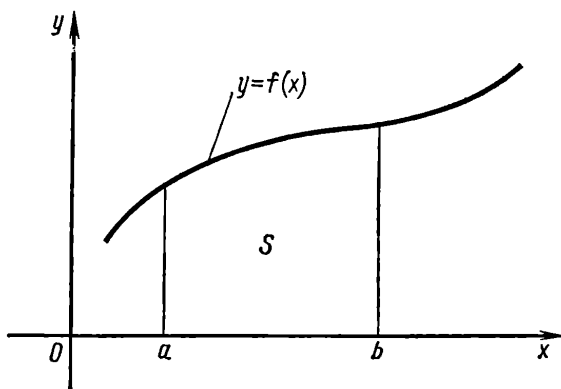


Рис. 14.1

$$S = - \int_a^b f(x) dx. \quad (14.1')$$

Если функция $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, b]$ конечное число раз, то отрезок разбивают на части, на которых функция знакопостоянна. Определенный интеграл по отрезку $[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по полученным частичным отрезкам. Для того чтобы получить сумму площадей, надо найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным отрезкам, т. е. вычислить определенный интеграл

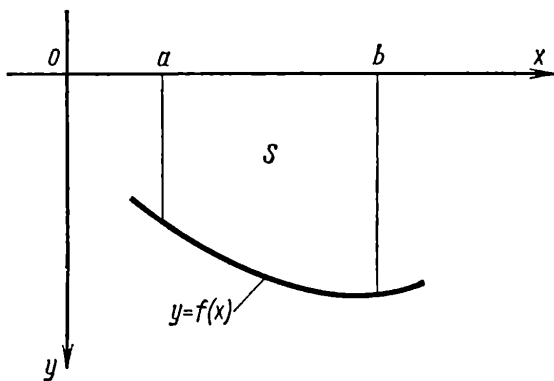


Рис. 14.2

$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (14.1'')$$

Определенный интеграл по всему отрезку численно равен разности между площадями, лежащими выше и ниже оси абсцисс. Так,

для случая, рассмотренного на рис. 14.3, определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = S_1 + S_3 - S_2.$$

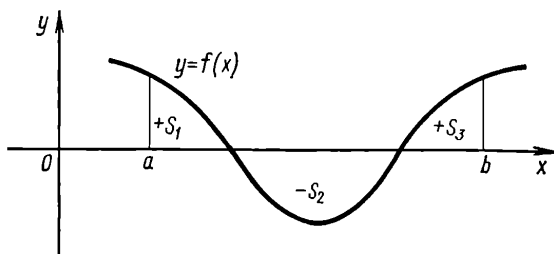


Рис. 14.3

Площадь S фигуры, ограниченной двумя непрерывными кривыми $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$, в случае, если $f_1(x) \leq f_2(x)$ при $a \leq x \leq b$ (рис. 14.4), равна

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (14.1''')$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = 1 \quad \text{и} \quad x = 4.$$

Решение. Кривая $y = 1/x$ представляет собой равноостороннюю гиперболу, расположенную в I квадранте (рис. 14.5).

Построение проводим по точкам. При x соответственно равно 1, 2, 3, 4, значения функции y : 1, 1/2, 1/3, 1/4. Здесь $f(x) = 1/x$; нижний предел интегрирования $a = 1$; верхний предел интегрирования $b = 4$.

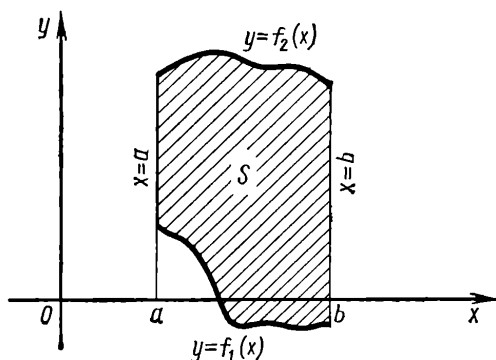


Рис. 14.4

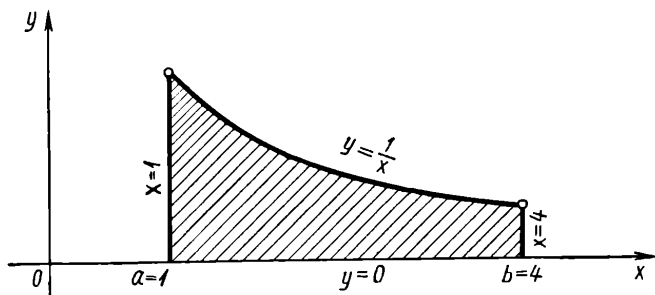


Рис. 14.5

Искомая площадь

$$S = \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^4 = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4 \quad (\text{кв. ед.})$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$; $x = e$; $y = 0$ (рис. 14.6).

Решение. Искомая площадь

$$S = \int_1^e \ln x \, dx.$$

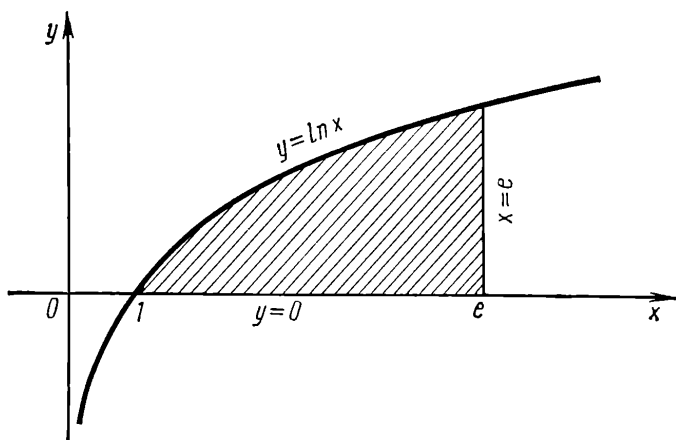


Рис. 14.6

Вычисляя этот интеграл по частям, получаем

$$S = [x \ln x - x]_1^e = e \cdot 1 - 1 \cdot 0 - e + 1 = 1 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$ (полукубическая парабола), $y = 8$; $x = 0$ (рис. 14.7).

Решение. Искомая площадь прилегает к оси Oy , поэтому

$$S = \int_{y_1}^{y_2} x \, dy = \int_{y_1}^{y_2} f(y) \, dy.$$

В данном случае $x = y^{2/3}$, следовательно,

$$S = \int_0^8 y^{2/3} \, dy = \frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^8 = 19,2 \text{ (кв. ед.)}$$

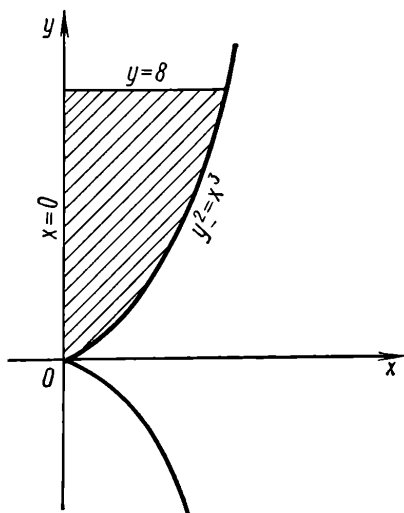


Рис. 14.7

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = -\frac{2}{3}x - 2, \quad y = 0 \text{ и } x = 6.$$

Решение. Фигура расположена под осью Ox (рис. 14.8). Имеем: $f(x) = -\frac{2}{3}x - 2$. Прямая пересекает ось x в точке $C(-3; 0)$.

Нижний предел интегрирования $a = -3$, верхний предел $b = 6$.
Площадь фигуры

$$S = \left| - \int_{-3}^6 \left(\frac{2}{3}x + 2 \right) dx \right| = \left| -\frac{1}{3}x^2 - 2x \right|_{-3}^6 = |-27| = 27 \text{ (кв. ед.)}$$

Пример 5. Вычислить площадь, ограниченную синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox ($0 \leq x \leq 2\pi$) (рис. 14.9).

Решение. В интервале $(0, \pi)$ функция $y = \sin x$ положительна, а в интервале $(\pi, 2\pi)$ отрицательна, следовательно,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} - (-\cos x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \\ &= -\cos \pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos \pi = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4 \text{ (кв.ед.)} \end{aligned}$$

Если требуется вычислить площадь (рис. 14.10), ограниченную кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и ординатами $x = a$, $x = b$, то при $f_1(x) \geq f_2(x)$ имеем

$$dS = (y_1 - y_2) dx = [f_1(x) - f_2(x)] dx,$$

откуда

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx.$$

Пример 6. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 4 - x$. Построить данные линии и заштриховать искомую площадь.

Решение. Точки пересечения параболы с прямой, найдем решая совместно их уравнения:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x^2, \\ y &= 4 - x. \end{aligned} \right\}$$

Имеем $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$ или $x^2 + 2x - 8 = 0$, откуда

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 2.$$

Построим данные линии (рис. 14.11) и вычислим площадь, ограниченную ими:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^2 \left[(4 - x) - \frac{1}{2}x^2 \right] dx = \int_{-4}^2 \left(4 - x - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = \\ &= \left(4x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_{-4}^2 = \left(4 \cdot 2 - \frac{2^2}{2} - \frac{2^3}{6} \right) - \left[4(-4) - \frac{(-4)^2}{2} - \frac{(-4)^3}{6} \right] = \\ &= 8 - 2 - \frac{4}{3} - \left(-16 - 8 + \frac{32}{3} \right) = 18 \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2 - 2$ и $y = 4 - x$. Построить эти линии и заштриховать искомую площадь.

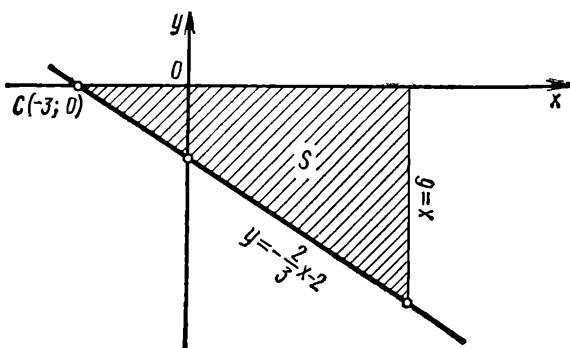


Рис. 14.8

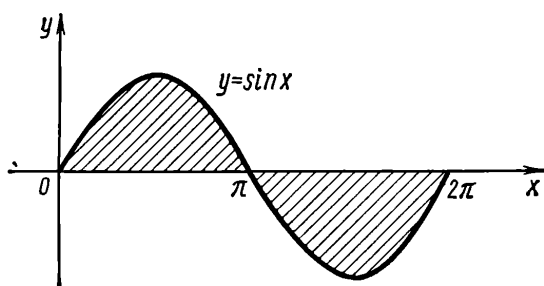


Рис. 14.9

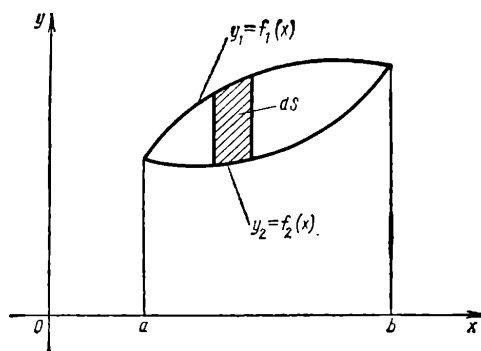


Рис. 14.10

Решение. Точки пересечения парабол найдем в результате решения системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2; \\ y = 6 - x^2. \end{cases}$$

Имеем $6 - x^2 = x^2 - 2$, или $x^2 - 4 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ и $y_1 = 2$, $y_2 = 2$. Итак, координаты точек пересечения $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$. Построим данные линии (рис. 14.12) и найдем ограниченную ими площадь:

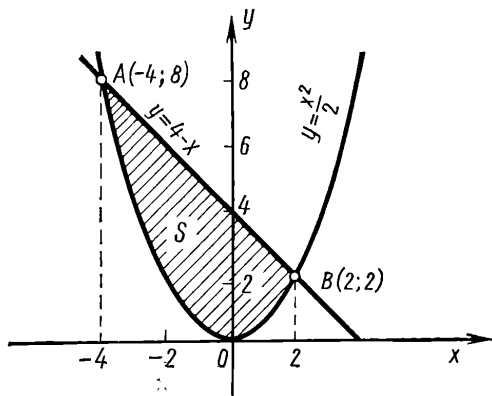


Рис. 14.11

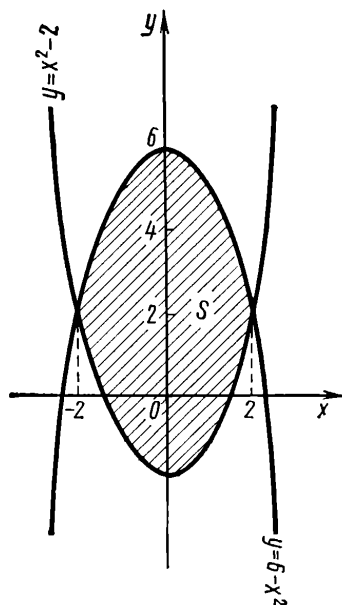


Рис. 14.12

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 [(6 - x^2) - (x^2 - 2)] dx = \int_{-2}^2 (6 - x^2 - x^2 + 2) dx = \\ &= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left(8x - 2 \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^2 = \left(8 \cdot 2 - 2 \frac{2^3}{3} \right) - \\ &\quad - \left[8 \cdot (-2) - 2 \frac{(-2)^3}{3} \right] = 16 - \frac{16}{3} - \left(-16 + \frac{16}{3} \right) = \\ &= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = 32 - \frac{32}{3} = \frac{96 - 32}{3} = \frac{64}{3} = 21 \frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

Формула (14.1) может быть использована также в случае, если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана в *параметрическом виде*, т. е. параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции от t .

Произведем замену переменной в определенном интеграле (14.1), предполагая, что $x = a$ при $t = t_1$ и $x = b$ при $t = t_2$. Тогда имеем

$$S = \int_a^b y dx = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \varphi'(t) dt. \quad (14.2)$$

Пример 8. Вычислить площадь эллипса, заданного параметрическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Эллипс симметричен относительно осей координат, поэтому вычислим площадь четверти эллипса и учетверим полученный результат. При изменении x от 0 до a параметр t убывает от $\pi/2$ до 0, поэтому площадь

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\pi/2}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = \\ &= 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = 4ab \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \\ &= \pi ab \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Пример 9. Вычислить площадь одного лепестка кривой $r = 4 \sin^2 \varphi$ (рис. 14.13).

Решение. Если полярный угол φ изменяется от $\varphi=0$ до $\varphi=\pi$, то точка обходит один лепесток кривой против часовой стрелки. Поэтому искомая площадь

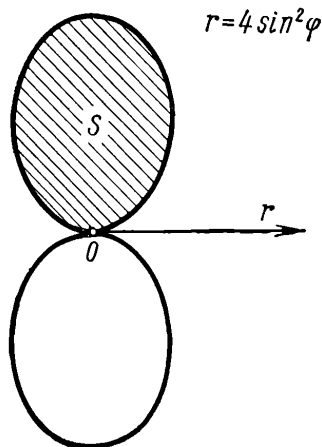


Рис. 14.13

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} 16 \sin^4 \varphi d\varphi = 8 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi = \\ &= 2 \int_0^{\pi} (1 - 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) d\varphi = 2 (\varphi - \sin 2\varphi) \Big|_0^{\pi} + \\ &+ 2 \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2\pi + \left(\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi} = 3\pi \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Пусть уравнение кривой AB (рис. 14.14) задано в полярных координатах: $r = f(\theta)$, где $f(\theta)$ — положительная и непрерывная функция для всех θ , удовлетворяющих неравенству $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Чтобы вычислить площадь криволинейного сектора AOB , разобьем его на n элементарных секторов радиусами-векторами $\theta_0 = \alpha, \theta = \theta_1, \dots, \theta_n = \beta$, углы между которыми обозначим соответственно $\Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n$. Рассмотрим бесконечно малый криволинейный сектор $\widehat{MON}$ с центральным углом $\Delta\theta = d\theta$. Проведем радиусом OM дугу $\widehat{MP}$ и исключим из площади криволинейного сектора площадь криволинейного треугольника MNP , как бесконечно малую величину выс-

шего порядка, поскольку обе стороны этого треугольника $\overline{MP} = r \Delta\theta = r dr$ и $\overline{PN} = dr$ — бесконечно малые при бесконечно малом $\Delta\theta$. Криволинейный сектор MON заменим круговым сектором MOP , площадь которого равна $\frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$ (где $\Delta\theta = d\theta$ — центральный угол

кругового сектора MOP , измеренный в радианах).

Таким образом, элементарная площадь любого i -го ($i=1, 2, \dots, n$) кругового сектора

$$dS_i = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i.$$

Суммируя площади всех элементарных круговых секторов, получим площадь образованного таким образом ступенчатого сектора OAB :

$$S_n = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta\theta_i.$$

Переходя к пределу при неограниченном возрастании числа n таких круговых секторов (т. е. когда $\max \Delta\theta_i \rightarrow 0$), получим площадь криволинейного сектора AOB :

$$S = \lim_{\max \Delta\theta_i \rightarrow 0} S_n = \lim_{\max \Delta\theta_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\theta_i,$$

которая является интегральной суммой для функции $r^2 = f^2(\theta)$ при $\alpha \leq \theta \leq \beta$. Следовательно, предел этой суммы есть соответствующий определенный интеграл:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta, \quad (14.3)$$

где $r = f(\theta)$.

Пример. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой $r = a \sqrt{\cos 2\theta}$ (рис. 14.15).

Решение. Очевидно, что радиус-вектор опишет четверть искомой площади, если угол θ изменится от 0 до $\pi/4$.

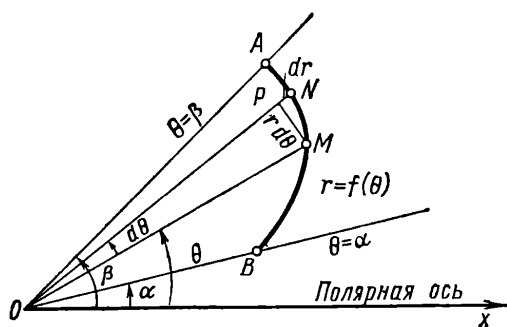


Рис. 14.14

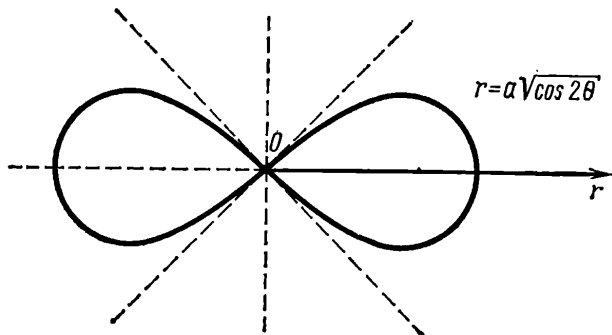


Рис. 14.15

Следовательно, искомая площадь

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 2a^2 \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_0^{\pi/4} = a^2 \text{ (кв. ед.)}.$$

§ 3 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМА ТЕЛА

1. Вычисление объема тела по известным поперечным сечениям.

Рассмотрим тело, ограниченное замкнутой поверхностью. Пересечем его плоскостью, перпендикулярной к любой из осей, например к оси Ox . Будем считать, что площадь сечения является заданной функцией $S(x)$ его расстояния от начала координат (рис. 14.16). Предположим, что тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями $x=a$ и $x=b$. Вычислим объем такого тела. Для этого отрезок $[a, b]$ разобьем точками $x_0=a, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n=b$ на n частей длиной $\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_{n-1}$. Через точки деления $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ проведем плоскости, перпендикулярные к оси Ox . Эти плоскости разобьют все тело на n элементарных слоев. Каждый такой слой ввиду его тонкости можно приближенно считать цилиндром. Объем такого элементарного слоя

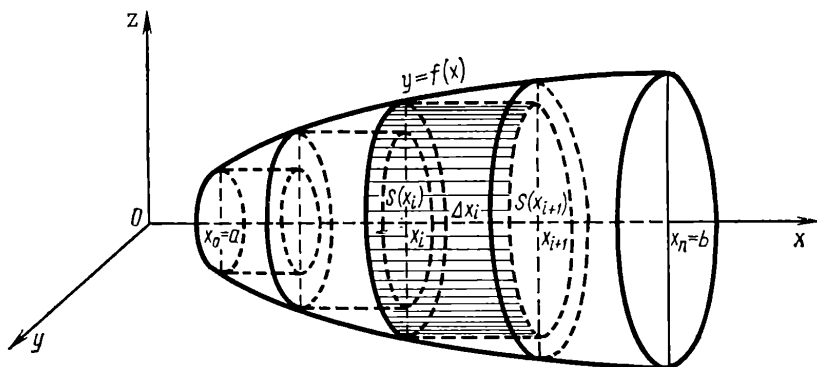


Рис. 14.16

равен объему цилиндра, площадь основания которого $S(x_i)$, а высота Δx_i , т. е. произведению $S(x_i) \Delta x_i$. Искомый объем тела приближенно равен сумме всех элементарных объемов, или, иначе, объему ступенчатого тела, состоящего из n цилиндров:

$$V_n \approx S(x_0) \Delta x_0 + S(x_1) \Delta x_1 + S(x_2) \Delta x_2 + \dots + S(x_{n-1}) \Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i) \Delta x_i. \quad (14.4)$$

Точный объем тела равен пределу, к которому стремится объем ступенчатого цилиндрического тела при условии, что число делений n неограниченно увеличивается, а длина наибольшего частичного интервала Δx_i (т. е. толщина каждого слоя) неограниченно уменьшается и стремится к нулю:

$$V = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} V_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i) \Delta x_i. \quad (14.5)$$

Под знаком предела стоит интегральная сумма для функции $S(x)$.

Предел этой суммы есть определенный интеграл $\int_a^b S(x) dx$. Поэтому

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (14.6)$$

2. Объем тела вращения. Пусть кривая AB , заданная уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ — однозначная непрерывная функция x , вращается вокруг оси абсцисс, описывая некоторую поверхность ABB_1A_1 (рис. 14.17). Определим объем тела вращения, образованного этой поверхностью и двумя плоскостями $x=a$ и $x=b$, проходящими через точки A и B перпендикулярно оси вращения Ox . В этом случае произвольное сечение тела плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс, есть круг, площадь которого

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

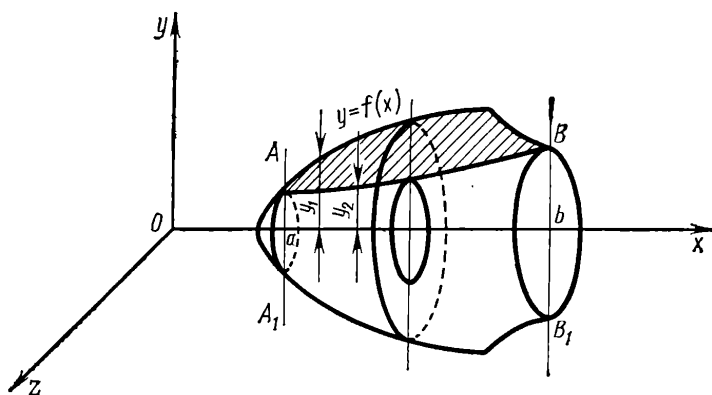


Рис. 14.17

Используя формулу (14.6), найдем объем тела вращения

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (14.7)$$

Аналогично, объем тела, образованного вращением дуги AB вокруг оси Oy , равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d \varphi^2(y) dy, \quad (14.8)$$

где $x=\varphi(y)$ (однозначная непрерывная функция от y) — уравнение кривой AB ; $y=c$ и $y=d$ — ограничивающие плоскости. Если бы фигура, заштрихованная на рис. 14.17, вращалась вокруг оси Ox , то объем получившегося тела вращения

$$V_x = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx = \pi \int_a^b [f_1^2(x) - f_2^2(x)] dx. \quad (14.9)$$

Пример 1. Найти объем сегмента параболоида, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вокруг оси Ox (рис. 14.18).

Решение. Так как y изменяется от 0 до a , то

$$V = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a 2px dx = \pi px^2 \Big|_0^a = \pi pa^2 \quad (\text{куб. ед.}).$$

Пример 2. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $x = 6$, $y = 0$.

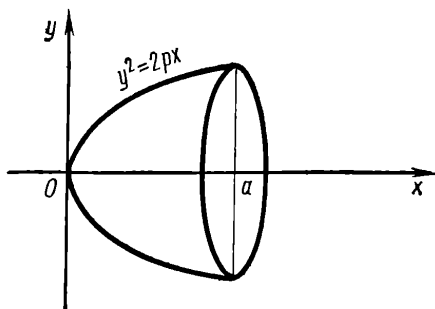


Рис. 14.18

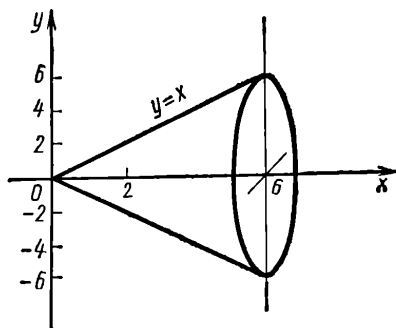


Рис. 14.19

Решение. Объем тела вращения, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, определяется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Объем конуса, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной заданными линиями (рис. 14. 19), равен

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^6 y^2 dx = \pi \int_0^6 x^2 dx = \\ &= \pi \frac{x^3}{3} \Big|_0^6 = \pi \frac{6^3}{3} = \frac{216}{3} \pi = 72\pi \end{aligned}$$

(куб. ед.).

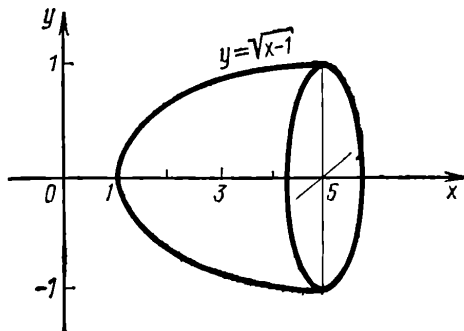


Рис. 14.20

Пример 3. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x-1}$, $x = 5$, $y = 0$, вокруг оси Ox .

Решение. Объем параболоида, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной заданными линиями (рис. 14.20),

$$V = \pi \int_1^5 y^2 dx = \pi \int_1^5 (x-1) dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_1^5 = \pi \left(\frac{25}{2} - 5 \right) -$$

$$- \pi \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{25-10}{2} \pi - \frac{1-2}{2} \pi = \frac{25-10-1+2}{2} \pi = 8\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

Пример 4. Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг его большой оси (рис. 14.21).

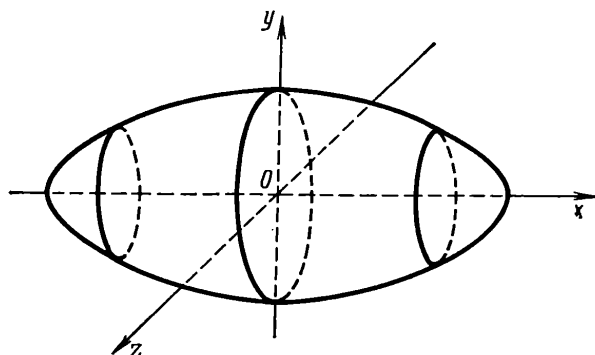


Рис. 14.21

Решение. Преобразуя уравнение эллипса, имеем

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2),$$

следовательно, объем тела вращения

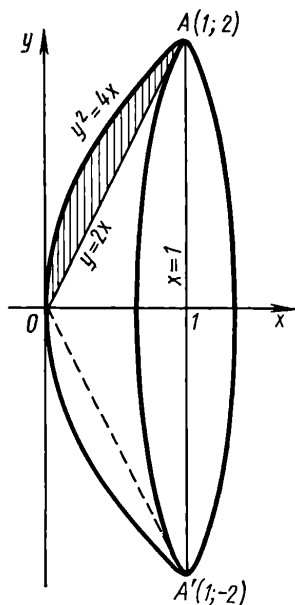


Рис. 14.22

$$V = \pi \int_{-a}^a y^2 dx = \pi \int_{-a}^a \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx =$$

$$= 2\pi \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{4}{3} \pi a b^2 \text{ (куб. ед.)}.$$

Пример 5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x$ и $y = 2x$ (рис. 14.22).

Решение. Решая систему

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 4x, \\ y &= 2x, \end{aligned} \right\}$$

находим точки пересечения параболы и прямой: $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$. Таким образом, пределы интегрирования $a=0$, $b=1$. Объем тела вращения равен разности объе-

мов параболоида V_1 , образованного вращением кривой $y^2 = 4x$, и конуса V_2 , образованного вращением прямой $y = 2x$:

$$V_1 = \pi \int_0^1 4x \, dx = 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi;$$

$$V_2 = \pi \int_0^1 4x^2 \, dx = 4\pi \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} \pi.$$

Таким образом,

$$V = V_1 - V_2 = 2\pi - \frac{4}{3} \pi = \frac{2}{3} \pi \quad (\text{куб. ед.}).$$

Пример 6. Найти объем тора, образованного вращением круга радиуса r вокруг оси, отстоящей от центра круга на расстояние R ($R > r$).

Решение. Выбираем систему координат так, чтобы ось вращения стала осью абсцисс, а центр круга лежал на оси ординат (рис. 14.23). Тогда уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + (y - R)^2 = r^2,$$

откуда

$$y_1 = R - \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{для точки } M);$$

$$y_2 = R + \sqrt{r^2 - x^2} \quad (\text{для точки } M_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (y_2^2 - y_1^2) \, dx = 2\pi \int_0^r (y_2 + y_1)(y_2 - y_1) \, dx = \\ &= 2\pi \int_0^r 2R \cdot 2\sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = \\ &= 8\pi R \left[\frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = 8\pi R \frac{r^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi^2 r^2 R \quad (\text{куб. ед.}). \end{aligned}$$

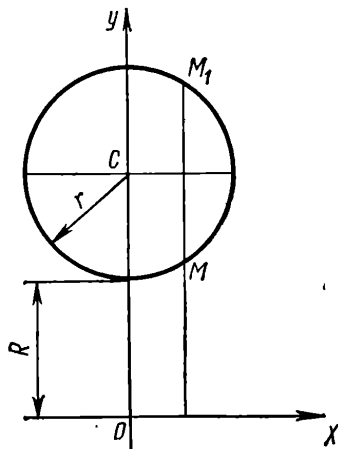


Рис. 14.23

§ 4. ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

Пусть в прямоугольных координатах задана кривая $y = f(x)$, где $f(x)$ — дифференцируемая функция, имеющая в интервале (a, b) непрерывную производную $f'(x)$. Поставим общую задачу найти длину дуги кривой между точками A и B (рис. 14.24). Найдем длину дуги $\overline{AB}$ кривой, заключенной между прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 14.25).

Разобьем отрезок $[a, b]$ произвольным образом на n частей точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. В этих точках вычислим и построим ординаты $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$, точки

пересечения которых с кривой соответственно $A, M_1, M_2, \dots, M_{n-2}, M_{n-1}, B$ (рис. 14.25). Эти точки соединим отрезками, в результате чего получим ломаную $AM_1M_2 \dots M_{n-2}M_{n-1}B$, вписанную в дугу $\widehat{AB}$ кривой. Из точки M_i проведем отрезок $\overline{M_iC}$, параллельный оси абсцисс. Тогда

$$\overline{M_iC} = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i, \quad \overline{M_{i+1}C} = y_{i+1} - y_i = \Delta y_i.$$

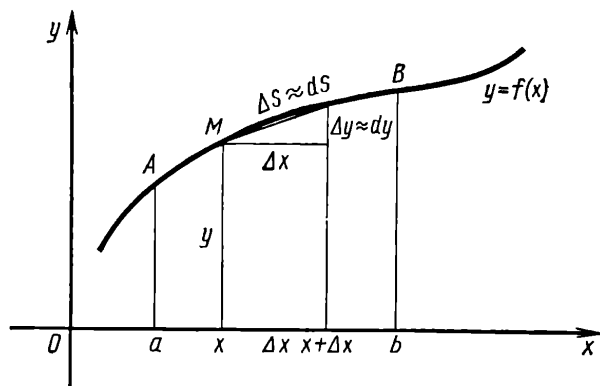


Рис. 14.24

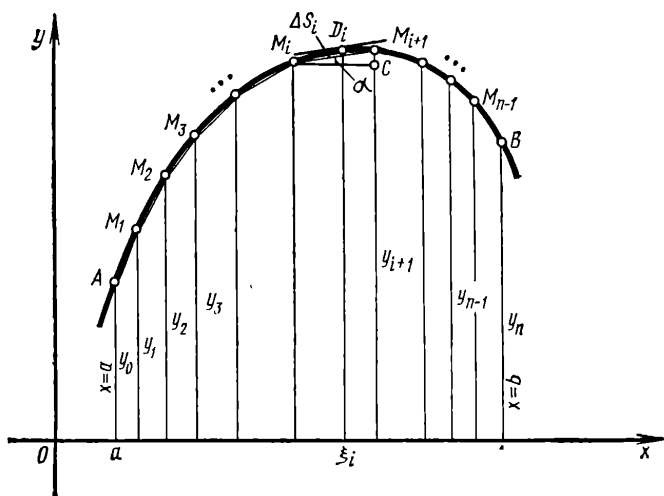


Рис. 14.25

Из прямоугольного треугольника $M_iM_{i+1}C$ следует, что его гипотенуза

$$\begin{aligned} \overline{M_iM_{i+1}} &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}{(\Delta x_i)^2}} \Delta x_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Здесь отношение $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \operatorname{tg} \alpha$ является угловым коэффициентом секущей M_iM_{i+1} . Согласно теореме Лагранжа, для функции $y = f(x)$ на

отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ справедливо равенство

$$f(x_i + \Delta x_i) - f(x_i) = \Delta x_i f'(\xi_i),$$

где $x_i < \xi_i < x_{i+1}$, или

$$\Delta y_i = \Delta x_i f'(\xi_i). \quad (14.11).$$

Из последнего равенства имеем

$$f'(\xi_i) = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}. \quad (14.12)$$

Подставляя выражение (14.12) в соотношение (14.10), получим длину i -го звена ломаной линии

$$\Delta s_i = \overline{M_i M_{i+1}} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Так как $\Delta x = dx$, $\Delta y \approx dy$, то отрезок $\overline{M_i M_{i+1}}$ представляет дифференциал дуги $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Длина всей ломаной

$$s_n = \sqrt{1 + [f'(\xi_0)]^2} \Delta x_0 + \sqrt{1 + [f'(\xi_1)]^2} \Delta x_1 + \dots + \\ + \sqrt{1 + [f'(\xi_{n-1})]^2} \Delta x_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Длиной s дуги кривой называется предел, к которому стремится периметр ломаной, вписанной в эту кривую, когда длина наибольшего из звеньев стремится к нулю, а число звеньев неограниченно увеличивается:

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} s_n = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta s_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i.$$

Если величина $\max \Delta s_i \rightarrow 0$, то и $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Отсюда

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i. \quad (14.13)$$

Правая часть этого соотношения есть интегральная сумма для функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ и отрезка $[a, b]$, а предел этой суммы есть определенный интеграл $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$. Таким образом, истинная длина дуги $\overset{\frown}{AB}$ кривой

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (14.14)$$

Пусть уравнение кривой задано в параметрической форме

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \right\}$$

при $t_1 \leq t \leq t_2$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции от t с непрерывными производными $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ в промежутке изменения параметра t . В этом случае дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

так как $dx = \varphi'(t) dt$ и $dy = \psi'(t) dt$. Следовательно, длина дуги

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad (14.15)$$

где t_1 и t_2 — значения параметра t на концах кривой. При использовании формулы (14.15) следует выбирать пределы интегрирования так, чтобы t и s изменялись одинаково, т. е. при возрастании (убывании) t возрастало (убывало) и s . В противном случае длина дуги получит знак минус.

Вычислим длину дуги, если уравнение кривой задано в полярных координатах: $r = f(\theta)$, где $f(\theta) \geq 0$ — дифференцируемая функция с непрерывной производной $f'(\theta)$ в промежутке изменения θ . Полярные и прямоугольные координаты с началом в полюсе связаны следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (14.16)$$

Продифференцируем оба равенства (14.16):

$$\begin{aligned} dx &= \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ dy &= \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

Тогда дифференциалы второго порядка

$$\begin{aligned} dx^2 &= \cos^2 \theta dr^2 - 2r \sin \theta \cos \theta dr d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\theta^2, \\ dy^2 &= \sin^2 \theta dr^2 + 2r \cos \theta \sin \theta dr d\theta + r^2 \cos^2 \theta d\theta^2. \end{aligned}$$

Складывая полученные равенства, имеем

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2.$$

Так как дифференциал функции $dr = r' d\theta$, то

$$dx^2 + dy^2 = \left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right] d\theta^2.$$

Поэтому дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2} d\theta \quad (14.17)$$

и, следовательно, длина всей дуги кривой

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2} d\theta. \quad (14.18)$$

Здесь θ_1 и θ_2 — значения аргумента θ на концах кривой. Следует выбирать пределы изменения θ так, чтобы θ и s изменялись одина-

ково. Геометрический смысл формулы $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ следует из рис. 14.14. Дифференциал дуги $ds = \overline{MN}$ рассматривается как гипотенуза прямоугольного треугольника MPN , катеты которого $\overline{MP} = r d\theta$ и $\overline{PN} = dr$.

Пример 1. Определить длину дуги кривой $y^2 = x^3$ (полукубической параболы), заключенной между осью Oy и прямой $x = 4/3$ (рис. 14.26).

Решение. Из соображений симметрии вычислим длину половины дуги кривой, расположенной в I квадранте. Уравнение дуги $\overline{OA}$: $y^2 = x^3$. Дифференцируя обе части равенства, имеем

$$2yy' = 3x^2$$

или

$$y' = \frac{3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \frac{3x^2}{2x\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

откуда $y'^2 = \frac{9}{4}x$.

Следовательно, длина половины дуги

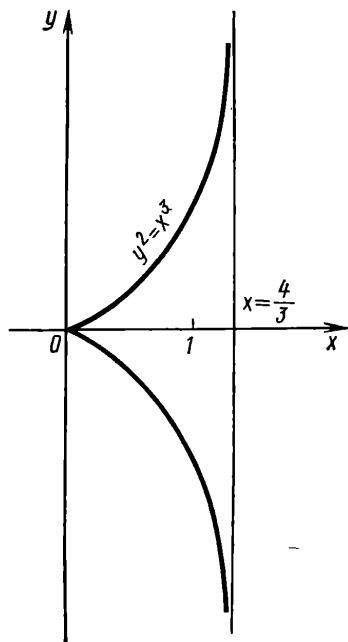


Рис. 14.26

$$\frac{s}{2} = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \int_0^{4/3} \sqrt{\frac{4+9x}{4}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{4/3} \sqrt{4+9x} dx.$$

Этот интеграл найдем с помощью подстановки $\sqrt{4+9x} = t$, $4+9x = t^2$, $x = \frac{t^2}{9} - \frac{4}{9}$, откуда $dx = \frac{2}{9} t dt$. При $x=0$ $t=2$; при $x=4/3$ $t=4$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{s}{2} &= \frac{1}{2} \int_0^{4/3} \sqrt{4+9x} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{9} \int_2^4 t^2 dt = \frac{1}{9} \left[\frac{t^3}{3} \right]_2^4 = \frac{1}{27} t^3 \Big|_2^4 = \\ &= \frac{1}{27} (4^3 - 2^3) = \frac{56}{27}. \end{aligned}$$

Следовательно, длина дуги

$$s = 112/27 \text{ (лин. ед.)}.$$

Пример 2. Вычислить длину дуги (арки) циклоиды (рис. 14.27)

$$\left. \begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t) \end{aligned} \right\}$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$.

Решение. Так как

$$dx = a(1 - \cos t) dt; \quad dy = a \sin t dt,$$

то

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} = a \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = a \sqrt{4 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} s &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = -4a (\cos \pi - \cos 0) = \\ &= -4a (-1 - 1) = 8a \text{ (лин. ед.)}. \end{aligned}$$

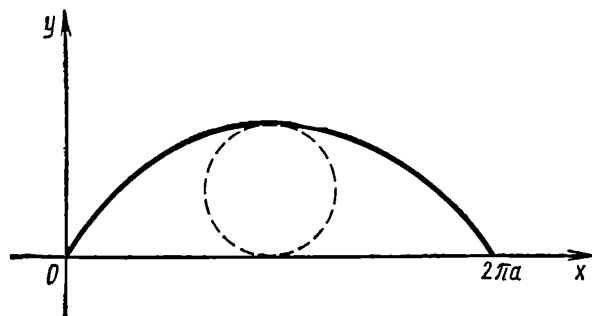


Рис. 14.27

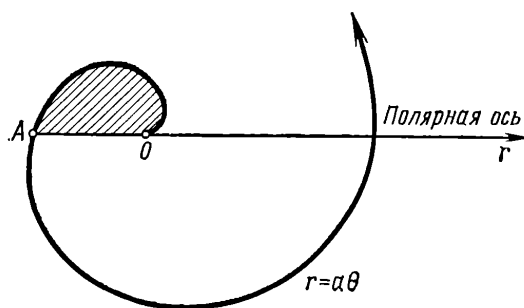


Рис. 14.28

Пример 3. Вычислить длину дуги $\widehat{OA}$ спирали Архимеда $r = a\theta$ при изменении θ от 0 до π (рис. 14.28).

Решение. Дифференциал дуги кривой

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2} d\theta = \\ &= \sqrt{a^2 + a^2\theta^2} d\theta = \\ &= a \sqrt{1 + \theta^2} d\theta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} s &= a \int_0^\pi \sqrt{1 + \theta^2} d\theta = a \left[\frac{\theta + \sqrt{1 + \theta^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln (\theta + \sqrt{1 + \theta^2}) \right]_0^\pi = \\ &= \frac{a}{2} [\pi \sqrt{1 + \pi^2} + \ln (\pi + \sqrt{1 + \pi^2})] \approx 6a \text{ (лин. ед.)}. \end{aligned}$$

§ 5. ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Рассмотрим поверхность, образованную вращением дуги $\widehat{AB}$ вокруг оси Ox (рис. 14.29). Найдем площадь этой поверхности. Для этого впишем в дугу $\widehat{AB}$ ломаную линию (на рис. 14.29 изобра-

жено звено этой ломаной MN). Пусть точка M имеет координаты x и y , а точка N — координаты $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. Хорда MN образует при вращении боковую поверхность усеченного конуса, площадь которой равна

$$2\pi \frac{(y + y + \Delta y)}{2} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \pi (2y + \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

следовательно, площадь поверхности, описываемой ломаной линией, равна

$$\sum_a^b \pi (2y + \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Площадь поверхности S , образуемой вращением дуги AB , есть предел, к которому стремится эта сумма, когда Δx и Δy стремятся к нулю. При этом каждое из слагаемых суммы $\pi (2y + \Delta y) \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ эквивалентно

величине $2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y ds$, т. е. дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

а предел этой суммы

$$S = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (14.19)$$

В равенстве (14.19) y и ds должны быть выражены через одну и ту же переменную. Пределами интегрирования являются значения независимой переменной в точках A и B .

Аналогично площадь поверхности, образованной вращением дуги $\tilde{AB}$ вокруг оси Oy ,

$$S = 2\pi \int_c^d x ds = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (14.20)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt, \quad (14.21)$$

где t_1 , t_2 — значения параметра t , соответствующие концам вращаемой дуги. Соответственно,

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} x(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (14.22)$$

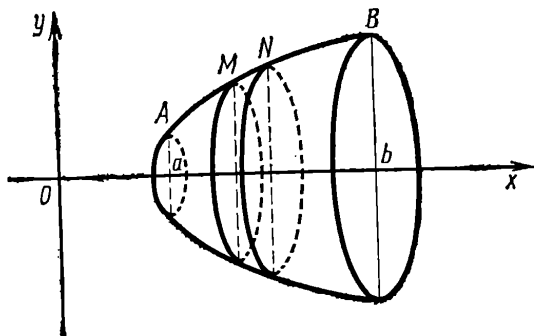


Рис. 14.29

Если уравнение кривой задано в полярных координатах, то на основании равенств (14.19) и (14.20) с учетом (14.16) и (14.17)

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \sin \theta \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\theta, \quad (14.23)$$

или (при вращении кривой вокруг оси Oy)

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cos \theta \sqrt{r^2 + \dot{r}^2} d\theta. \quad (14.24)$$

Пример 1. Вычислить площадь поверхности шара, радиус которого R .

Решение. Поверхность шара может быть образована вращением полуокружности, радиус которой R , вокруг диаметра AB . Для вычисления площади поверхности воспользуемся формулой (14.19). Перейдем к полярным координатам. Тогда $ds = R d\theta$; $y = R \sin \theta$ (рис. 14.30).

Следовательно, искомая площадь поверхности

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} R^2 \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi R (-\cos \theta) \Big|_0^{\pi} = 4\pi R^2 \text{ (кв. ед.)} \end{aligned}$$

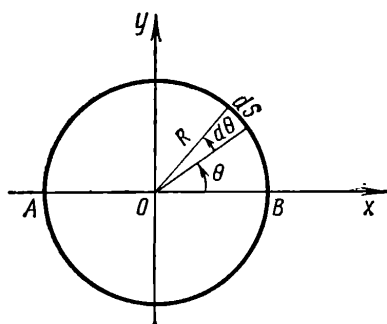


Рис. 14.30

Пример 2. Вычислить площадь поверхности, образуемой вращением вокруг оси Oy дуги логарифмической спирали $r = e^{\varphi}$, расположенной в I квадранте ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$).

Решение. Искомая площадь

$$S = 2\pi \int_0^{\pi/2} e^{\varphi} \cos \varphi \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi = 2\pi \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} e^{2\varphi} \cos \varphi d\varphi.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} e^{2\varphi} \cos \varphi d\varphi &= \frac{2}{5} e^{2\varphi} \left(\cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{2}{5} \left(\frac{e^{\pi}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2). \end{aligned}$$

Итак,

$$S = 2\pi \sqrt{2} \cdot \frac{1}{5} (e^{\pi} - 2) = \frac{2\pi \sqrt{2}}{5} (e^{\pi} - 2).$$

Пример 3. Вычислить площадь поверхности тора, образованного вращением круга $x^2 + (y-b)^2 = a^2$ вокруг оси Ox ($b > a$).

Решение. Искомая площадь поверхности S равна сумме площадей двух поверхностей (рис. 14.31): боковой (внешней) поверхности, образованной вращением кривой ABE , уравнение которой $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}$ (S_1), и боковой (внутренней) поверхности, образованной вращением кривой ADB , уравнение которой $y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$ (S_2). Вычислим площадь первой поверхности

$$\begin{aligned} S_1 &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-a}^a y_1 \sqrt{1 + y_1'^2} dx. \end{aligned}$$

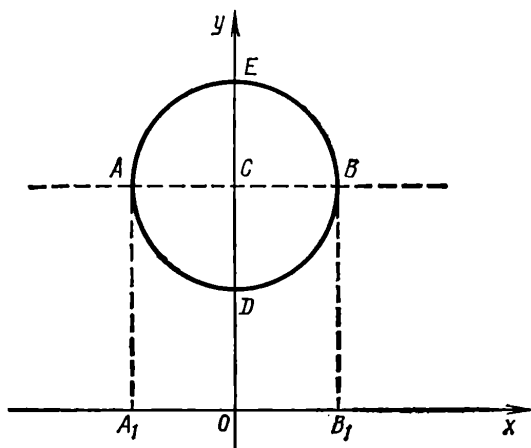


Рис. 14.31

Площадь второй поверхности

$$S_2 = 2\pi \int_{-a}^a y_2 \sqrt{1 + y_2'^2} dx.$$

Следовательно,

$$S = S_1 + S_2 = 2\pi \int_{-a}^a [y_1 \sqrt{1 + y_1'^2} + y_2 \sqrt{1 + y_2'^2}] dx.$$

Так как производные

$$y_1' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}; \quad y_2' = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

то

$$y_1'^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2} = y_2'^2$$

и

$$\begin{aligned} 1 + y_1'^2 &= 1 + y_2'^2 = 1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2 - x^2 + x^2}{a^2 - x^2} = \frac{a^2}{a^2 - x^2}; \\ \sqrt{1 + y_1'^2} &= \sqrt{1 + y_2'^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$S = 2\pi \int_{-a}^a \left[(b + \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + (b - \sqrt{a^2 - x^2}) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right] dx =$$

$$= 4\pi ab \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 4\pi ab \left[\arcsin \frac{x}{a} \right]_{-a}^a =$$

$$= 4\pi ab [\arcsin 1 - \arcsin (-1)] = 4\pi ab \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = 4\pi^2 ab \text{ (кв. ед.)}.$$

Пример 4. Найти площадь поверхности, образованной вращением астроида $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ вокруг оси Ox (рис. 14.32).

Решение. Воспользуемся формулой (14.21). Здесь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3a \cos^2 t \sin t; & \frac{dy}{dt} &= 3a \sin^2 t \cos t; \\ y(t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= a \sin^3 t \sqrt{9a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t)} = \\ &= 3a^2 \sin^4 t \cos t. \end{aligned}$$

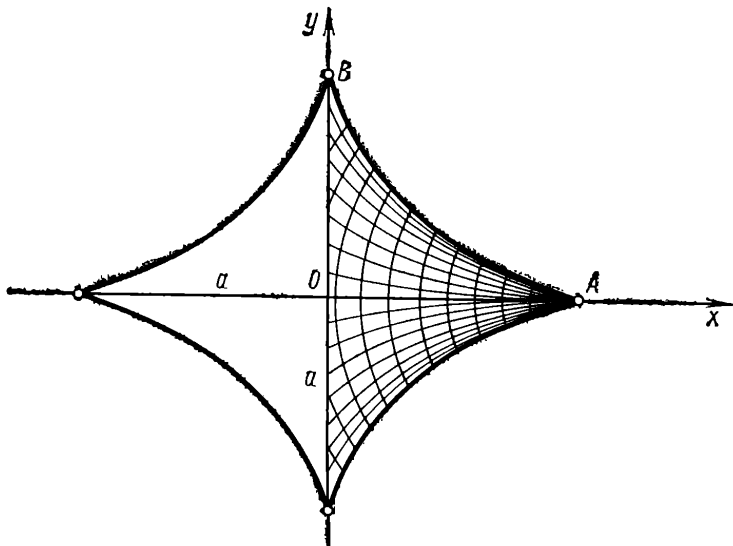


Рис. 14.32

При изменении параметра t от $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi/2$, точка движется по астроиде от A к B . Дуга $\widehat{AB}$ при вращении образует половину площади поверхности вращения:

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= 2\pi \int_0^{\pi/2} 3a^2 \sin^4 t \cos t \, dt = 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \, d(\sin t) = \\ &= 6\pi a^2 \frac{\sin^5 t}{5} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{6}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

Вся площадь поверхности вращения $S = \frac{12}{5} \pi a^2$ (кв. ед.).

Упражнения

Вычисление площадей

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2 + 2y - 4 = 0$ и осью Ox .

Отв. $\frac{16}{3\sqrt{3}}$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3 - 7x^2 + 10$ и прямой $y = 0$.

Отв. $21 \frac{1}{12}$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной равнобочной гиперболой $xy = a^2$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = 2a$.

Отв. $a^2 \ln 2$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = x$.

Отв. $1/2$.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = x - \pi$, $x = 0$, $x = \pi$.

Отв. $2 + \pi^2/2$.

6. Найти площадь фигуры, ограниченной цепной линией $y = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$, осью Oy и прямой $x = a$.

Отв. $\frac{a^2}{2e} (e - 1)$.

7. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^3$, прямой $y = 8$ и осью Oy .

Отв. 12.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 2y$ и $y^2 = 2x$.

Отв. $4/3$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/x^2$, $x = a$ ($a > 0$) и осью Ox .

Отв. $1/a$.

10. Найти площадь, ограниченную осью Ox и кривой $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Отв. π .

11. Найти площадь области, заключенной между параболлами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

Отв. $\frac{4}{3} p^2$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$ и $y = x$.

Отв. $3/2$.

13. Найти площадь, заключенную между кривыми $y = \frac{8}{4+x^2}$ и $y = \frac{x^2}{4}$.

Отв. $2(\pi - 2/3)$.

14. Найти площадь области, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью абсцисс.

Отв. $3\pi a^2$.

15. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ при $a > 0$.

Отв. $\frac{3}{8} \pi a^2$.

16. Найти площадь области, ограниченной лемнискатой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Отв. a^2 .

17. Вычислить площадь области, ограниченной петлей кривой $y^2 = x^3 + x^2$.

Отв. $8/15$.

18. Вычислить площадь, ограниченную улиткой Паскаля $r = 2 + \cos \varphi$.

Отв. $\frac{9}{2} \pi$.

19. Вычислить площадь области, ограниченной кардиондой $r = a(1 - \cos \varphi)$.

Отв. $\frac{3}{2} \pi a^2$.

20. Найти площадь области, ограниченной кривой $\rho = a \sin 2\varphi$ ($a > 0$).

Отв. $\frac{\pi a^2}{2}$.

Вычисление объемов

1. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 12x$, $x = 3$, вокруг оси Ox .

Отв. 54π .

2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $x^2 = 8y$ и $x = 3$, вокруг оси Oy .

Отв. $\frac{81}{16}\pi$.

3. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$.

Отв. $\frac{96\pi}{5}$.

4. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2px$ и $x = a$, вокруг оси Ox .

Отв. πpa^2 .

5. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $y = 0$ и $x = 1$, вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{\pi}{4}$.

6. Найти объем тела, ограниченного поверхностью вращения полуволны синусоиды $y = \sin x$, вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{\pi^2}{2}$.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностью вращения гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямыми $y = \pm b$, вокруг оси Oy .

Отв. $\frac{8\pi a^2 b}{3}$.

8. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной кривой $y = xe^x$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$.

9. Найти объем тела, ограниченного поверхностью вращения одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, вокруг оси Ox .

Отв. $5\pi^2 a^3$.

10. Цилиндр, радиус которого R , пересечен плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Найти объем отсеченной части.

Отв. $\frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg} \alpha$.

11. Найти объем тела, образованного вращением астроида $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{32a^3}{105}\pi$.

12. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x = 1$, $x = -1$, вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{\pi}{4}(\pi + 2)$.

13. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$, вокруг оси Oy .

Отв. $\frac{2048}{35}\pi$.

14. Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x=0$, $y=0$, вокруг оси Oy .

Отв. $\frac{\pi a^3}{15}$.

Вычисление длин дуг

1. Определить длину окружности $x^2 + y^2 = r^2$.

Отв. $2\pi r$.

2. Найти всю длину гипоциклоиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Отв. $6a$.

3. Вычислить длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x=5a$.

Отв. $\frac{335}{27} a$.

4. Найти длину дуги цепной линии $y = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a})$ от начала координат до точки с координатами $(x; y)$.

Отв. $\frac{a}{2} (e^{x/a} - e^{-x/a}) = \sqrt{y^2 - a^2}$.

5. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ в пределах от $x=3/4$ до $x=12/5$.

Отв. $1,35 + \ln 2 \approx 2,04$.

6. Найти длину дуги кривой $y = 1 - \ln \cos x$ в пределах от $x=0$ до $x=\pi/4$.

Отв. $\ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}$.

7. Найти периметр фигуры, ограниченной линиями $x^2 = (y+1)^3$ и $y=4$.

Отв. $10 \left(\frac{67}{27} + \sqrt{5} \right)$.

8. Найти длину кривой $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

Отв. $\frac{3}{2} \pi a$.

9. Найти длину кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$.

Отв. $8a$.

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

1. Найти площадь поверхности, образованной вращением параболы $y=4ax$ вокруг оси Ox , от $x=0$ до точки с абсциссой $x=3a$.

Отв. $\frac{56}{3} \pi a^2$.

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кубической параболы $y=x^3$, заключенной между прямыми $x=-\frac{2}{3}$ и $x=\frac{2}{3}$.

Отв. $\frac{2\pi}{27} \left(\frac{125}{27} - 1 \right) \approx 0,845$.

3. Найти площадь поверхности конуса, образованного вращением отрезка прямой $y=2x$ от $x=0$ до $x=2$ вокруг оси Oy .

Отв. $4\pi \sqrt{5}$.

4. Найти площадь поверхности тора, образованного вращением полукруга $x^2 + (y-4)^2 = 2^2$ вокруг оси Ox .

Отв. $32\pi^2$.

5. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением кардиоиды $x = a(2 \cos \varphi - \cos 2\varphi)$, $y = a(2 \sin \varphi - \sin 2\varphi)$ вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{128}{5} \pi a^2$.

6. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{64}{3} \pi a^2$.

7. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением астроида $x = a \sin^3 t$, $y = a \cos^3 t$ вокруг оси Ox .

Отв. $\frac{12}{5} \pi a^2$.

§ 6. ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Определенный интеграл широко применяется в физических и технических задачах. Определенный интеграл находит применение в случае, если необходимо вычислить предел суммы произведений. В связи с этим необходимо привести основной принцип, характерный для большинства задач.

Пусть требуется определить некоторую постоянную величину B , связанную с промежутком изменения независимой переменной x и распределенную в этом промежутке так, что каждому частичному промежутку (α, β) , содержащемуся в интервале $[a, b]$, отвечает некоторая часть величины B (обозначим ее через B_α^β). Разложение всего интервала на частичные промежутки влечет за собой разложение на соответствующие части величины B . При этом справедливо свойство аддитивности: если частичный промежуток (α, β) разделить на два частичных промежутка (α, γ) и (γ, β) , то имеет место равенство

$$B_\alpha^\gamma + B_\gamma^\beta = B_\alpha^\beta.$$

Задача заключается в нахождении значения B , отвечающего всему промежутку $[a, b]$, т. е. B_a^b . Если величина B равномерно распределена на отрезке $[a, b]$, т. е. единице длины отрезка $[a, b]$ соответствует постоянная величина q (плотность распределения), то величину B легко найти:

$$B = B_a^b = q(b - a).$$

При неравномерном распределении величины B промежуток $[a, b]$ приходится дробить на такие малые частичные промежутки, чтобы было можно считать величину B равномерно распределенной на каждом частичном промежутке $[x, x + \Delta x]$ с плотностью q_x . В этом случае

$$B_x^{x+\Delta x} = q_x \Delta x.$$

Пользуясь свойством аддитивности, имеем

$$B = B_a^b = \Sigma B_x^{x+\Delta x} \approx \Sigma q_x \Delta x.$$

Погрешность будет тем меньше, чем меньше Δx . Устремляя длину каждого частичного промежутка к нулю и получая предельным переходом определенный интеграл, делаем погрешность равной нулю. Схема применения определенного интеграла сводится к следующему:

1) разбиваем искомую величину на бесконечно малые части и выбираем независимую переменную x ;

2) отбрасывая бесконечно малые высшего порядка, заменяем каждую из бесконечно малых частей искомой величины эквивалентным элементом вида $f(x) \Delta x$ (элементарной частью искомой величины);

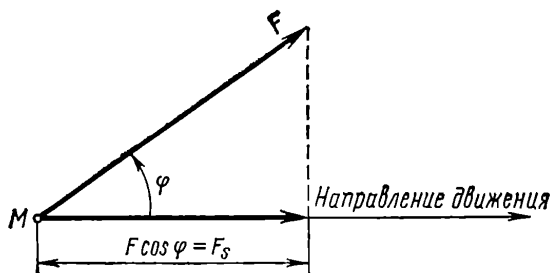


Рис. 14.33

3) независимая переменная изменяется на протяжении всех элементов в пределах от a до b и поэтому искомая величина равна

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(x) \Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

1. Работа силы

Работа A силы определяется по формуле

$$A = Fs \cos \varphi = F_s s, \quad (14.25)$$

где F — постоянная сила, действующая на тело при прямолинейном поступательном движении (рис. 14.33); F_s — составляющая силы по направлению движения. При совпадении направления движения с направлением действия силы угол $\varphi = 0$ и соотношение (14.25) принимает вид

$$A = Fs \cos 0 = Fs \cdot 1 = Fs. \quad (14.26)$$

Такое определение работы недостаточно точно, если сила переменна или рассматривается криволинейное движение тел.

Пусть материальная точка M движется по прямой под действием силы F , направленной в сторону движения. Требуется найти работу, произведенную силой F при перемещении точки M из положения $M_1 (s=a)$ в положение $M_2 (s=b)$. Если сила постоянна, то производимая ею работа по формуле (14.26) равна произведению силы на пройденный путь:

$$A = F(b-a).$$

Здесь сила F — величина переменная, зависящая от положения точки $M (s)$, т. е. $F = F(M) = F(s)$, где $F(s)$ — непрерывная функция s . Обозначим через $A = A(s)$ работу, произведенную силой

при перемещении точки из положения $M_1(a)$ в любое положение $M(s)$. Эта работа определяется положением текущей концевой точки $M(s)$. Если придать s бесконечно малое приращение $\Delta s = ds$, то на элементарном участке силу $F = F(s)$ можно считать постоянной и дифференциал (бесконечно малое приращение) работы

$$dA(s) = F(s) ds.$$

Учитывая, что при $s = a$, $A(a) = 0$, находим

$$A(s) = \int_a^s F(s) ds,$$

следовательно, работа, произведенная силой $F(s)$ при перемещении точки из $M_1(a)$ в $M_2(b)$,

$$A = \int_a^b F(s) ds. \quad (14.27)$$

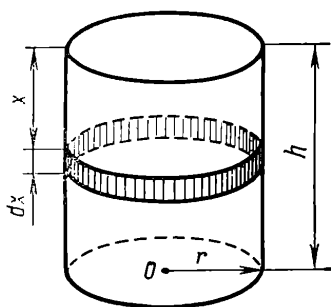


Рис. 14.34

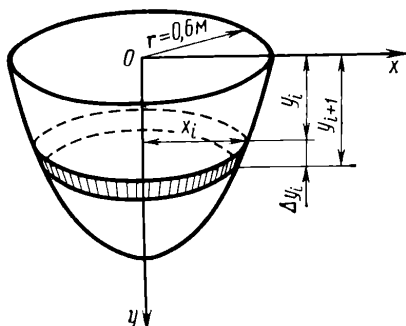


Рис. 14.35

Задача 1. Вычислить работу, которую нужно совершить, чтобы выкачать воду из цилиндрического резервуара, высота которого $h = 5$ м, а радиус основания $r = 3$ м.

Решение. Работа, необходимая для поднятия тела, сила тяжести которого P , на высоту h , определяется по формуле $A = Ph$. Слой воды в резервуаре находится на разной глубине, поэтому высота поднятия для разных слоев различна. Если выделить из всей массы воды бесконечно тонкий слой, то можно считать, что вода этого слоя находится на одной глубине. Обозначим глубину слоя через x , а толщину — через dx (рис. 14.34). Площадь основания слоя $S = \pi r^2$ (м²). Следовательно, объем такого бесконечно тонкого слоя равен $\pi r^2 dx$ (м³), сила тяжести его $P = 9806,65 \pi r^2 dx$ (Н), где $9806,65$ Н/м³ — удельный вес воды. Работа, необходимая для поднятия тела на высоту x , равна $x \cdot 9806,65 \pi r^2 dx$ (Дж). Работа, затрачиваемая на выкачивание всей воды из резервуара, определяется суммой бесконечно большого числа таких выражений, причем глу-

бина слоя меняется от $x=0$ до $x=h$. Итак, окончательно имеем

$$A = \int_0^h 9806,65\pi r^2 x dx = \frac{9806,65\pi r^2}{2} x^2 \bigg|_0^h \approx \frac{9806,65 \cdot 3,14 \cdot 9}{2} x^2 \bigg|_0^5 = \\ = \frac{9806,65 \cdot 3,14 \cdot 9}{2} \cdot 25 \approx 3464189,1 \text{ Дж} \approx 3464 \text{ кДж} \approx 3,46 \text{ МДж}.$$

Задача 2. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферы, радиус которой $r=0,6$ м (рис. 14.35).

Решение. Разбиваем объем полусферы плоскостями, параллельными основанию, на элементарные объемы высотой Δy_i . Элементарный слой будем считать цилиндрическим с переменным радиусом основания x_i , следовательно, объем такого слоя приближенно равен $\pi x_i^2 \Delta y_i$. Сила тяжести воды в этом объеме приближенно равна $9806,65\pi x_i^2 \Delta y_i$ (Н), где $9806,65 \text{ Н/м}^3$ — удельный вес воды. Работа, затрачиваемая для подъема этой массы воды с глубины y_i приближенно равна $\Delta A_i \approx 9806,65\pi x_i^2 y_i \Delta y_i$ (Дж). Сечением полусферы в плоскости xOy является полуокружность $x^2 + y^2 = r^2$. Поэтому $x_i^2 = r^2 - y_i^2$. Подставляем последнее равенство в выражение элементарной работы:

$$\Delta A_i \approx 9806,65\pi (r^2 - y_i^2) y_i \Delta y_i.$$

Просуммируем все элементарные работы:

$$A \approx 9806,65\pi \sum_i (r^2 - y_i^2) y_i \Delta y_i.$$

Переходя к пределу, имеем

$$A = 9806,65\pi \int_0^r y (r^2 - y^2) dy = 9806,65\pi \left(r^2 \int_0^r y dy - \int_0^r y^3 dy \right) = \\ = 9806,65\pi \left[r^2 \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right]_0^r = 9806,65\pi \left(\frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right) = \frac{9806,65\pi}{4} \cdot r^4 = \\ = 2451,66\pi r^4.$$

В результате подстановки числовых значений, получаем

$$A = 2451,66\pi r^4 \approx 2451,66 \cdot 3,14 \cdot 0,6^4 \approx 997,8 \text{ Дж} \approx 1 \text{ кДж}.$$

Задача 3. Вычислить работу, которую необходимо затратить на преодоление силы тяжести при постройке пирамиды высотой $h=140$ м с квадратным основанием $a=200$ м (рис. 14.36). Удельный вес камня $\gamma=24517 \text{ Н/м}^3 \approx 24,5 \text{ кН/м}^3$.

Решение. Разобьем высоту пирамиды h на элементарные промежутки $[0, y_1)$, $[y_1, y_2)$, $\dots$, $[y_i, y_{i+1})$, $\dots$, $[y_{n-1}, H]$ и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию пирамиды. Таким образом, пирамида разбивается на элементарные слои высотой Δy_i ($i=0, 1, 2, \dots, n-1$). Выделенный слой (на рис. 14.36 заштрихован) будем считать прямой призмой с площадью основания S_i . Элементарная работа, которую необходимо затратить на

поднятие камня на высоту y_i , чтобы заполнить им элементарный слой пирамиды высотой $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, равна произведению силы тяжести тела на высоту подъема, т. е.

$$\Delta A_i \approx \gamma S_i y_i \Delta y_i, \quad (*)$$

где y_i — высота подъема камня до слоя S_i , γ — удельный вес камня. Так как пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины

$$\frac{S_i}{S_{\text{осн}}} = \frac{h_i^2}{h^2}.$$

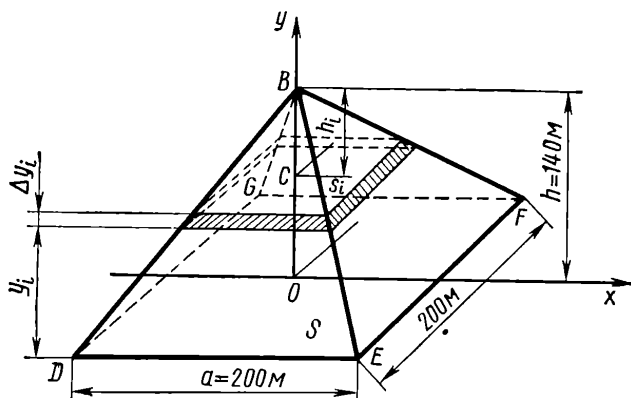


Рис. 14.36

Поскольку $S_{\text{осн}} = a^2$, $h_i = h - y_i$, то

$$S_i = \frac{a^2 (h - y_i)^2}{h^2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (*), имеем

$$\Delta A_i \approx \gamma \frac{a^2}{h^2} y_i (h - y_i)^2 \Delta y_i.$$

Переходя к пределу суммы элементарных работ, находим

$$\begin{aligned} A &= \gamma \frac{a^2}{h^2} \int_0^h y (h - y)^2 dy = \gamma \frac{a^2}{h^2} \int_0^h (h^2 y - 2h y^2 + y^3) dy = \\ &= \gamma \frac{a^2}{h^2} \left[h^2 \frac{y^2}{2} - 2h \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{\gamma a^2}{h} \left(\frac{h^4}{2} - \frac{2h^4}{3} + \frac{h^4}{4} \right) = \gamma \frac{a^2 h^2}{12}. \end{aligned}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} A &= \gamma \frac{a^2 h^2}{12} = \frac{24517 \cdot 40000 \cdot 19600}{12} \approx 1601777000000 \text{ Дж} = \\ &= 1601777000 \text{ кДж} = 1601777 \text{ МДж} \approx 1602 \text{ ГДж}. \end{aligned}$$

2. Деформация спиральной пружины

Задача 1. Вычислить работу, необходимую для растяжения на величину $s_e = s_2 - s_1$ пружины из положения покоя $s_1 = 0$. Переме-

жение пружины (сжатие или растяжение) пропорционально приложенной силе F . Сила F и перемещение s связаны зависимостью $F = ks$, где k — коэффициент пропорциональности. Так как $F = f(s)$ является величиной переменной, то нельзя считать, что работа $A = F(s_2 - s_1)$. Однако для небольшого отрезка Δs_i силу можно считать постоянной. Следовательно, произведение $F_i \Delta s_i$ является приближенным значением работы на i -м небольшом отрезке. Таким образом, приближенно работа

$$A \approx F_1 \Delta s_1 + F_2 \Delta s_2 + \dots + F_n \Delta s_n = \sum_{s_1}^{s_2} F_i \Delta s_i.$$

Предпосылка о постоянстве силы в отрезке тем точнее, чем меньше Δs_i . Поэтому при $\max \Delta s_i \rightarrow 0$

$$A = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{s_1}^{s_2} F_i \Delta s_i,$$

откуда, используя определение определенного интеграла, можно записать

$$A = \int_{s_1}^{s_2} F ds. \quad (14.28)$$

В данном случае $F = ks$, следовательно,

$$A = \int_{s_1}^{s_2} ks ds = k \int_0^{s_e} s ds = \frac{k s_e^2}{2} = \frac{F_e s_e}{2}. \quad (14.28')$$

Если сила постоянна, т. е. $F = f(s) = \text{const}$, то формула (14.28) принимает вид

$$A = F \int_{s_1}^{s_2} ds = F s \Big|_{s_1}^{s_2} = F (s_2 - s_1).$$

Задача 2. Сжатие s винтовой пружины пропорционально приложенной силе: $F = ks$. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,05 м, если для сжатия на 0,01 м нужна сила в 100 Н (рис. 14.37).

Решение. Так как при $s = 0,01$ м, $F = 100$ Н, то из условия $F = ks$ вытекает, что $k = 10000$ Н/м. Следовательно, $F = 10000s$ (Н) и, согласно соотношению (14.28), получаем

$$A = \int_0^{0,05} 10000s ds = 5000s^2 \Big|_0^{0,05} = 5000 \cdot 0,0025 = 12,5 \text{ Дж.}$$

3. Путь, пройденный телом

Скорость поступательно движущегося тела определяется по формуле $v = \frac{ds}{dt}$, откуда $ds = v dt$. При неравномерном движении скорость v есть известная функция времени: $v = v(t)$.

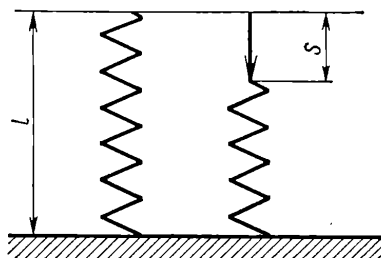


Рис. 14.37

Путь s , пройденный телом за время $t_2 - t_1$, определяется так:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Задача 1. Скорость движущегося тела задана формулой $v = \sqrt{1+t}$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 10 с после начала движения.

Решение. В данном случае $t_1 = 0$, $t_2 = 10$ с и путь, пройденный телом за 10 с, равен

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{10} \sqrt{1+t} dt = \frac{2}{3} \sqrt{(1+t)^3} \Big|_0^{10} = \frac{2}{3} (\sqrt{11^3} - 1) = \\ &= \frac{2}{3} (11\sqrt{11} - 1) \approx 23,65 \text{ м.} \end{aligned}$$

Задача 2. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $v = 39,2 - 9,8t$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Решение. Тело достигнет наибольшей высоты подъема в момент времени t , когда скорость v равна нулю, т. е. $39,2 - 9,8t = 0$, откуда $t = 4$ с. Следовательно, наибольшая высота подъема

$$h = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \int_0^4 (39,2 - 9,8t) dt = (39,2t - 4,9t^2) \Big|_0^4 = 78,4 \text{ м.}$$

4. Сила притяжения

Два тела, масса которых m_1 и m_2 , находятся на расстоянии r_1 друг от друга. Какую работу необходимо совершить, чтобы расстояние между ними стало равным r_2 ?

Физический закон притяжения $F = f \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Здесь f — константа притяжения. Действующая сила переменна и зависит от расстояния между двумя массами. Работа, согласно формуле (14.28),

$$A = -f m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = f m_1 m_2 \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = f m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right).$$

Задача. Какую работу нужно затратить, чтобы ракету массой m с поверхности Земли удалить в бесконечность?

Решение. Как известно, закон притяжения любого тела Землей

$$F = mg \frac{R^2}{r^2},$$

где m — масса тела, g — ускорение силы тяжести, R — радиус Земли, r — расстояние тела до центра Земли.

Если тело поднято на высоту $OB = x$ над поверхностью Земли (рис. 14.38), то сила притяжения

$$F = mg \frac{R^2}{(R+x)^2}.$$

При перемещении тела на dx производится элементарная работа

$$dA = mg \frac{R^2}{(R+x)^2} dx.$$

Так как по условию x изменяется от 0 до $+\infty$, то искомая работа

$$\begin{aligned} A &= mg R^2 \int_0^{\infty} \frac{dx}{(R+x)^2} = mg R^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_0^h \frac{dx}{(R+x)^2} = mg R^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{R+x} \right) \Big|_0^h = \\ &= mg R^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{R+h} - \left(-\frac{1}{R+0} \right) \right] = mg R^2 \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h} \right) = \\ &= mg R^2 \left(\frac{1}{R} - \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{1}{R+h} \right) = mg R^2 \left(\frac{1}{R} - 0 \right) = mg R. \end{aligned}$$

Следовательно, для удаления ракеты массой m с поверхности Земли в бесконечность нужно затратить работу $A = mg R$ (ед. работы).

5. Изотермическое и адиабатическое расширение газов

Если газ объемом V расширяется на величину dV , т. е. до объема $V + dV$, то производимая при этом работа $dA = p dV$ (здесь p — давление газа).

Для изотермического расширения (температура постоянна) справедлив закон Бойля — Мариотта $p_1 V_1 = pV$, где p_1, V_1 — известные начальные значения давления и объема; p, V — взаимосвязанные величины давления и объема конечного состояния.

Так как

$$p = \frac{p_1 V_1}{V},$$

то

$$dA = \frac{p_1 V_1}{V} dV.$$

Общая работа при изменении объема от V_1 до V определяется с помощью определенного интеграла:

$$A = \int_{V_1}^V p dV = p_1 V_1 \int_{V_1}^V \frac{dV}{V} = p_1 V_1 \ln \frac{V}{V_1}.$$

Если расширение газа адиабатическое (без притока и отдачи тепла), то процесс описывается законом Пуассона

$$p_1 V_1^\kappa = p V^\kappa,$$

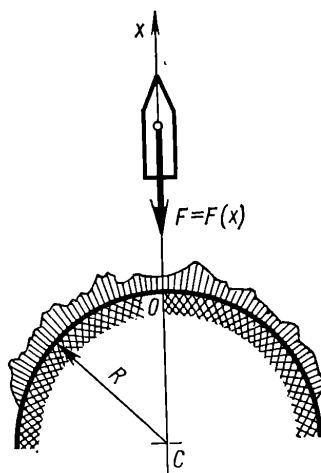


Рис. 14.38

где $\kappa = \frac{C_p}{C_v}$.

Итак,

$$p = p_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^\kappa,$$

поэтому работа

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^V p dV = \int_{V_1}^V p_1 \left(\frac{V_1}{V} \right)^\kappa dV = p_1 V_1^\kappa \int_{V_1}^V \frac{dV}{V^\kappa} = p_1 V_1^\kappa \frac{V^{-\kappa+1}}{-\kappa+1} \Big|_{V_1}^V = \\ &= -\frac{p_1 V_1^\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{1}{V^{\kappa-1}} - \frac{1}{V_1^{\kappa-1}} \right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$A = \frac{p_1 V_1^\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{1}{V^{\kappa-1}} - \frac{1}{V_1^{\kappa-1}} \right).$$

Задача. Газ заключен в цилиндр с подвижным поршнем. Воспользовавшись законом Бойля — Мариотта $pV = k$, вычислить работу, совершаемую при выталкивании поршня (рис. 14.39).

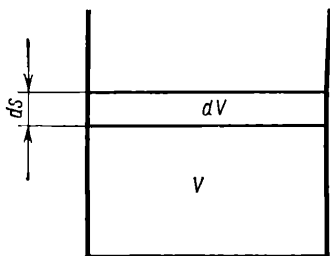


Рис. 14.39

Решение. Пусть V — объем газа, p — давление газа на единицу площади поршня. Если площадь поршня равна F , то газ оказывает давление, равное Fp , следовательно, элементарная работа $dA = Fp ds$. Приращение объема dV при перемещении поршня на величину ds равно $F ds$, т. е. $F ds = dV$. Так как $p = k/V$, то

$$dA = F ds p = p dV = k \frac{dV}{V}.$$

Отсюда работа, совершаемая газом,

$$A = \int_{V_1}^{V_2} k \frac{dV}{V} = k \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = k \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

6. Давление жидкости на погруженную поверхность

Давление жидкости на горизонтальную поверхность равно силе тяжести вертикального столба жидкости, основание которого есть эта поверхность, а высота равна расстоянию до свободной поверхности жидкости.

Давление p на глубине h (м) на 1 м^2 площади равно $p = h\gamma$, где γ (Н/м³) — удельный вес жидкости. Полное гидростатическое давление (сила давления) на горизонтальную поверхность площади S :

$$P = pS = \gamma hS \text{ Н.}$$

Рассмотрим задачу определения гидростатического давления на плоскую фигуру, вертикально погруженную в жидкость. Пусть в жидкость вертикально погружена плоская фигура $A_1A_2B_2B_1$ (рис. 14.40). Свободная поверхность жидкости отмечена осью Ox . Элементарная площадка $dS = (x_2 - x_1) dy$ испытывает давление

$$dP = \gamma(x_2 - x_1) y dy.$$

Отсюда

$$P = \int_c^d \gamma(x_2 - x_1) y dy. \quad (14.29)$$

Для интегрирования x_1 и x_2 надо выразить через y .

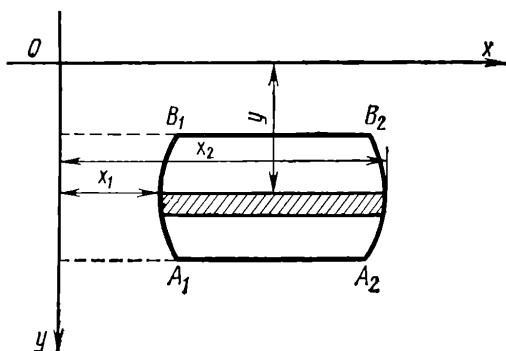


Рис. 14.40

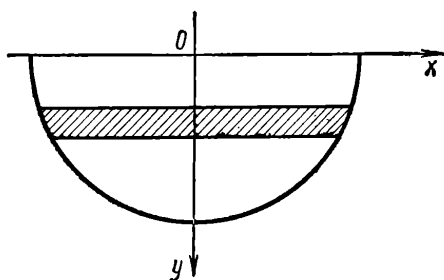


Рис. 14.41

Задача 1. Найти гидростатическое давление на полуокруг, вертикально погруженный в воду, если его радиус равен 1 м, а диаметр совпадает со свободной поверхностью воды (рис. 14.41).

Решение. Заштрихованная на рис. 14.41 элементарная площадка

$$dS = 2x dy = 2\sqrt{1-y^2} dy$$

испытывает силу давления воды

$$dP = \gamma dS = 2 \cdot 9806,65 y \sqrt{1-y^2} dy = 19613,3 y \sqrt{1-y^2} dy \text{ Н},$$

так как удельный вес воды $\gamma = 9806,65 \text{ Н/м}^3$. Следовательно, искомое полное гидростатическое давление

$$P = 19613,3 \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy = -\frac{19613,3}{3} (1-y^2) \sqrt{1-y^2} \Big|_0^1 = \\ = 6537,7 \text{ Н} \approx 6,54 \text{ кН}.$$

Задача 2. Цилиндрический резервуар наполнен маслом. Вычислить силу давления масла на боковую поверхность резервуара, если его высота $h = 2 \text{ м}$, радиус основания $r = 1 \text{ м}$. Удельный вес масла $\gamma = 8820 \text{ Н/м}^3$.

Решение. На глубине x выделим горизонтальную круговую полоску шириной dx . Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на величину dP . Площадь круговой полоски

$$\Delta S = 2\pi r dx = 2\pi \cdot 1 \cdot dx = 2\pi dx.$$

Сила давления в ньютонах на горизонтальную площадку

$$P = \gamma S x,$$

где γ —удельный вес жидкости в Н/м³; S —площадь площадки в м²; x —глубина погружения площадки в м.

Найдем элементарное давление на полоску ΔS :

$$dP = \gamma x \Delta S = 8820x \cdot 2\pi dx \approx 55390x dx \text{ Н.}$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от $x=0$ до $x=2$, получим

$$P = 55390 \int_0^2 x dx = 27695x^2 \Big|_0^2 = 27695 \cdot 4 = 110780 \text{ Н} \approx 111 \text{ кН.}$$

Задача 3. Определить силу, с которой вода давит на плотину, имеющую форму равнобоочной трапеции (рис. 14.42).

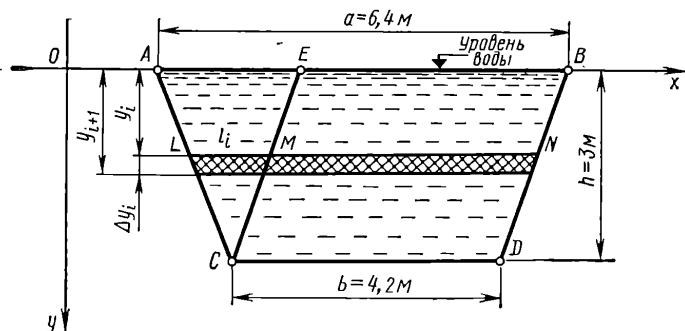


Рис. 14.42

Решение. Верхнее основание трапеции $a=6,4$ м, нижнее $b=4,2$ м, высота $h=3$ м. С помощью прямой CE , параллельной BD , разбиваем трапецию на параллелограмм $CDBE$ и треугольник AEC . Выделяем элементарную полоску высотой Δy_i и заменяем ее прямоугольником, длина которого $LN=LM+MN=l_i+b$. Слагаемое l_i изменяется, а b остается всюду постоянным. Площадь элементарной полоски трапеции приблизительно равна $(b+l_i)\Delta y_i$. Давление на элементарную полоску на глубине y_i :

$$\Delta P_i \approx \gamma y_i (b+l_i) \Delta y_i.$$

Из подобия треугольников AEC и CLM получаем

$$\frac{l_i}{a-b} = \frac{h-y_i}{h},$$

откуда

$$l_i = \frac{a-b}{h} (h - y_i).$$

Таким образом,

$$\Delta P_i \approx \gamma y_i \left[b + \frac{a-b}{h} (h - y_i) \right] \Delta y_i = \gamma y_i \left[a - \frac{a-b}{h} y_i \right] \Delta y_i.$$

Переходя к пределу суммы элементов, получаем

$$\begin{aligned} P &= \gamma \int_0^h y \left(a - \frac{a-b}{h} y \right) dy = \gamma \int_0^h \left(ay - \frac{a-b}{h} y^2 \right) dy = \\ &= \gamma \left[\frac{ay^2}{2} - \frac{a-b}{h} \frac{y^3}{3} \right]_0^h = \gamma \left(\frac{ah^2}{2} - \frac{(a-b)h^2}{3} \right) = \\ &= \frac{(a+2b)h^2\gamma}{6} = \frac{(6,4+2 \cdot 4,2) \cdot 9 \cdot 9806,65}{6} = 217374 \text{ Н} \approx 217,4 \text{ кН}. \end{aligned}$$

7. Время истечения жидкости

Если h — высота жидкости в резервуаре, то скорость истечения жидкости из сосуда согласно закону Торичелли

$$v = c \sqrt{2gh},$$

где g — ускорение силы тяжести, h — высота уровня жидкости над отверстием, $c = 0,6$ — опытный коэффициент.

Если S — площадь сечения отверстия, то за единицу времени вытекает $Q = Sv$ жидкости.

Пусть сосуд имеет переменное поперечное сечение $y = f(x)$ (рис. 14.43). Для малого промежутка времени dt , за которое зеркало жидкости упало на dx , давление и поперечное сечение сосуда можно считать постоянными. Вытекающее за время dt количество жидкости равно

$$S \sqrt{2gx} dt = -y dx$$

(знак минус берется, так как $dx < 0$). Отсюда

$$dt = \frac{-y dx}{S \sqrt{2gx}}.$$

При $t = 0$ и $t = t$ соответственно $x = h$ и $x = x$. Поэтому

$$\int_0^t dt = \int_h^x \frac{-y dx}{S \sqrt{2gx}}$$

и

$$t = - \frac{1}{S \sqrt{2g}} \int_h^x \frac{y dx}{\sqrt{x}}. \quad (14.30)$$

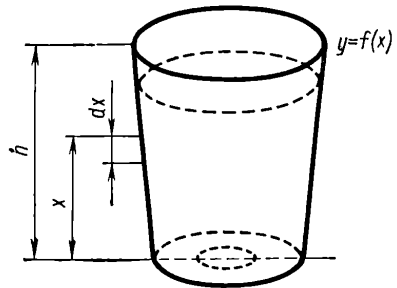


Рис. 14.43

Здесь $y = f(x)$ — функция, связывающая изменение поперечного сечения сосуда и высоту x .

Таким образом, можно определить время t , в течение которого уровень жидкости упадет от h до x ($x < h$). При полном истечении $x = 0$.

Задача. За какое время вытечет жидкость из наполненного доверху цилиндрического сосуда, диаметр которого D и высота H ? Жидкость вытекает через круглое отверстие с диаметром d .

Решение. При уменьшении уровня жидкости на dh объем жидкости уменьшится на $\pi R^2 dh$. Количество жидкости, вытекшее через отверстие в дне, равно $c \sqrt{2gh} \pi r^2 dt$, где $r = \frac{1}{2} d$.

Так как уменьшение объема равно количеству вытекшей жидкости, то

$$-\pi R^2 dh = \pi r^2 c \sqrt{2gh} dt,$$

откуда

$$dt = -\frac{R^2}{cr^2 \sqrt{2g}} \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Высота h — величина переменная и изменяется в процессе истечения жидкости от H до 0. Поэтому

$$t = -\frac{R^2}{cr^2 \sqrt{2g}} \int_H^0 \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{R^2}{cr^2 \sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{h} \Big|_H^0 = \frac{2R^2 \sqrt{H}}{cr^2 \sqrt{2g}}.$$

8. Масса стержня

Масса μ стержня длиной l вычисляется по формуле

$$\mu = \int_0^l \rho dx,$$

где $\rho = \rho(x)$ — линейная плотность стержня.

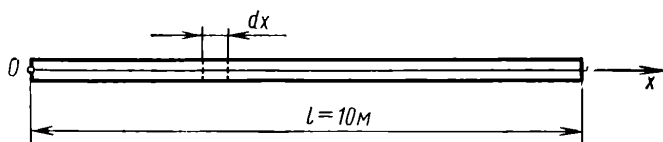


Рис. 14.44

Задача. Определить массу стержня длиной $l = 10$ м (рис. 14.44), если линейная плотность стержня меняется по закону

$$\rho = 5 + 0,25x \text{ (кг/м)},$$

где x — расстояние от одного из концов стержня.

Решение. Так как на участке длиной dx плотность можно считать постоянной, то масса элементарного отрезка стержня равна ρdx . Следовательно, для выделенного участка

$$dm = (5 + 0,25x) dx.$$

Интегрируя в пределах от $x=0$ до $x=l$, получаем искомую массу

$$\begin{aligned}\mu &= \int_0^l dm = \int_0^l (5 + 0,25x) dx = \left[5x + 0,25 \cdot \frac{1}{2} x^2 \right]_0^l = 5l + \frac{1}{8} l^2 = \\ &= 5 \cdot 10 + \frac{1}{8} \cdot 10^2 = 50 + 12,5 = 62,5 \text{ кг.}\end{aligned}$$

9. Центр тяжести и моменты инерции

Пусть на плоскости xOy задана материальная точка $A^*(x; y)$ с массой m . *Статическим моментом* материальной точки A^* (массы m) относительно некоторой оси L называется произведение массы m на расстояние d точки от оси: $M_L = md$. Статические моменты точки A^* относительно осей Ox и Oy соответственно равны $M_x = my$; $M_y = mx$.

Статический момент системы n материальных точек $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $\dots$, $A_n(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ относительно любой оси, лежащей в плоскости xOy , равен сумме статических моментов каждой из точек относительно этой оси:

$$M_L = \sum_{i=1}^n m_i d_i.$$

Расстояния точек, лежащих по одну сторону оси, берутся со знаком плюс, а лежащих по другую сторону оси — со знаком минус. В частности,

$$M_x = m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n = \sum_{i=1}^n m_i y_i \quad (14.31)$$

и

$$M_y = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n = \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (14.32)$$

Пусть $C(x_C; y_C)$ — центр тяжести системы точек. Точка C обладает тем свойством, что если сосредоточить в ней всю массу системы точек $\sum_{i=1}^n m_i = m$, то момент точки C относительно любой оси совпадает с моментом системы точек относительно этой оси.

Через статические моменты M_x и M_y определяются координаты центра тяжести $(x_C; y_C)$ системы точек. Действительно, из равенств

$$M_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i = \sum_{i=1}^n m_i y_C$$

и

$$M_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i x_C,$$

следует

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i}; \quad (14.33)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}. \quad (14.34)$$

Соотношения (14.33) и (14.34) иногда удобно представить в виде

$$x_c = \frac{M_y}{m}; \quad (14.33')$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}, \quad (14.34')$$

где $m = \sum_{i=1}^n m_i$ — масса системы точек.

Если массы заполняют линию или плоскую фигуру, то для выражения их статических моментов и масс вместо сумм применяют интегралы.

а) Статические моменты и центры тяжести плоских кривых. Пусть дана материальная плоская кривая AB . Ограничимся рассмотрением кривых с равномерно распределенной массой, т. е. линейная плотность ρ кривой есть величина постоянная (ρ — масса, приходящаяся на единицу длины). Для простоты полагаем $\rho = 1$. В противном случае полученные результаты умножаются на постоянную величину ρ . Масса любой дуги кривой AB измеряется ее длиной и понятие статического момента обретает геометрический смысл. Выделим какой-нибудь элемент ds кривой, масса которого также выражается числом ds . Принимая элемент за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси Ox , получим

$$dM_x = y ds; \quad dm = ds.$$

Суммируя элементарные статические моменты и элементарные массы вдоль кривой AB , имеем

$$M_x = \int y ds; \quad m = \int ds.$$

Аналогично,

$$M_y = \int x ds.$$

Согласно соотношениям (14.33) и (14.34), находим

$$x_c = \frac{\int x ds}{\int ds} \quad (14.35)$$

и

$$y_C = \frac{\int y ds}{\int ds}. \quad (14.36)$$

В равенствах (14.35) и (14.36) x , y и ds должны быть выражены через одну и ту же переменную из уравнения кривой, а пределы интегрирования определяются значениями независимой переменной на концах дуги AB . При этом пределы следует выбирать так, чтобы аргумент и длина дуги изменялись одинаково, т. е. чтобы при возрастании аргумента возрастало и s . В противном случае статический момент или масса имеют знак минус.

Задача 1. Найти координаты центра тяжести полуокружности, расположенной над осью Ox .

Решение. Перейдем в равенствах (14.35) и (14.36) к полярным координатам:

$$x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi; \quad ds = r d\varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\int x ds}{\int ds} = \frac{\int_0^\pi r^2 \cos \varphi d\varphi}{\int_0^\pi r d\varphi} = \frac{r^2 \sin \varphi \Big|_0^\pi}{\pi r} = 0; \\ y_C &= \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi}{\int_0^\pi r d\varphi} = -\frac{r^2 \cos \varphi \Big|_0^\pi}{r\varphi \Big|_0^\pi} = \frac{-r^2 \cos \pi + r^2 \cos 0}{\pi r} = \\ &= \frac{-r^2(-1) + r^2 \cdot 1}{\pi r} = \frac{2r}{\pi}. \end{aligned}$$

Если дуга симметрична относительно некоторой прямой, то центр тяжести дуги лежит на этой прямой.

Задача 2. Найти координаты центра тяжести одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t)$$

при $0 \leq t \leq 2\pi$ (см. рис. 14.35).

Решение. Ввиду симметрии $x_C = \pi a$, следовательно,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} dt = \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= a \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt \end{aligned}$$

и

$$y ds = a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 4a^2 \sin^3 \frac{t}{2} dt.$$

Как известно (см. § 4, задачу 2), длина одной ветви циклоиды равна $8a$, т. е.

$$\int ds = 8a.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \int y ds &= 4a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 4a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= -8a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d \cos \frac{t}{2} = -8a^2 \left[\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \\ &= -8a^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{32}{3} a^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_c = \frac{\int y ds}{\int ds} = \frac{\frac{32}{3} a^2}{8a} = \frac{4}{3} a.$$

б) Статические моменты и центры тяжести плоских фигур. Рассмотрим криволинейную трапецию $AabBa$, огра-

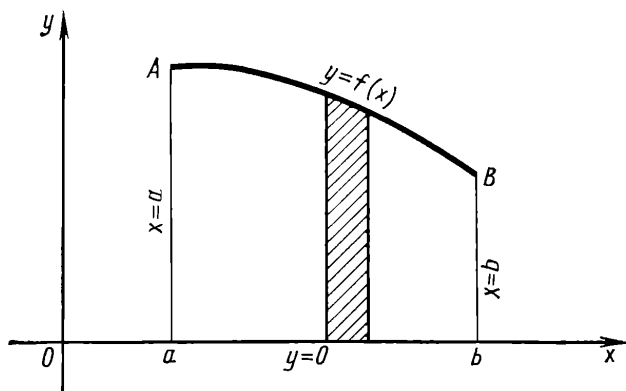


Рис. 14.45

ниченную кривой $y=f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 14.45). Предположим, что фигура является материальной, т. е. каждому элементу площади соответствует некоторая масса. Поверхностную плотность (массу единицы площади поверхности) будем считать постоянной и равной ρ . Можно принять $\rho=1$, тогда масса любой части фигуры измеряется ее площадью.

Для определения статических моментов M_x и M_y фигуры выделим элементарную площадь криволинейной трапеции в виде бесконечно узкой вертикальной полоски (заштрихована на рис. 14.45). Масса этой полоски равна ее площади $y dx$. Для определения элементарного статического момента сосредоточим массу полоски в ее центре тяжести. Координаты центра тяжести полоски $\left(x; \frac{1}{2} y\right)$.

Следовательно,

$$dM_x = y dx \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{2} y^2 dx$$

и

$$dM_y = y dx \cdot x = xy dx.$$

Просуммировав эти элементарные моменты по всей площади, получим

$$M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$$

и

$$M_y = \int_a^b xy dx.$$

Используя равенства (14.33') и (14.34'), получим координаты центра тяжести криволинейной трапеции:

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xy dx}{\int_a^b y dx}; \quad (14.37)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx}{\int_a^b y dx}. \quad (14.38)$$

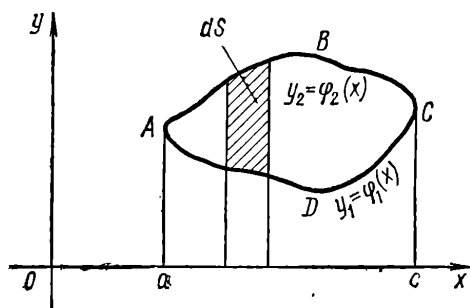


Рис. 14.46

Если фигура ограничена замкнутым контуром $ABCD A$ (рис. 14.46), то элемент площади

$$dS = (y_2 - y_1) dx.$$

Здесь $y_1 = \varphi_1(x)$ — уравнение кривой ADC ; $y_2 = \varphi_2(x)$ — уравнение кривой ABC . Центр тяжести полоски находится в точке $(x; \frac{y_1 + y_2}{2})$, следовательно,

$$dM_x = \frac{y_1 + y_2}{2} (y_2 - y_1) = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2} dx;$$

$$dM_y = x (y_2 - y_1).$$

С помощью этих равенств можно вычислить статический момент криволинейной трапеции $aABCca$ и вычесть статический момент добавленной криволинейной трапеции $aADCca$.

Задача 1. Найти центр тяжести верхнего полуэллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Решение. Из симметрии эллипса очевидно, что $x_c = 0$. Используя соотношение (14.38), находим ординату центра тяжести

$$y_c = \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a y^2 dx}{\int_{-a}^a y dx} = \frac{\int_0^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) dx}{\frac{1}{2} \pi ab} = \frac{2b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_0^a}{\pi ab} = \frac{2b^2 \cdot \frac{2}{3} a}{\pi ab} = \frac{4b}{3\pi}.$$

(Интеграл знаменателя заменен известной площадью полуэллипса.)

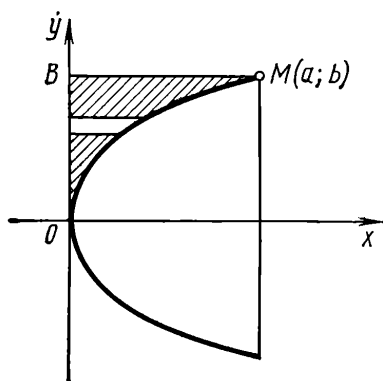


Рис. 14.47

Задача 2. Найти центр тяжести фигуры $OMBO$ (заштрихована на рис. 14.47). Кривая OM — парабола, осью симметрии которой является ось Ox ; $\overline{BM} = a$, $\overline{OB} = b$.

Решение. Найдем уравнение параболы OM , каноническое уравнение которой $y^2 = 2px$. Так как парабола проходит через точку $M(a; b)$, то $b^2 = 2pa$, откуда $2p = b^2/a$. Следовательно, кривая OM определяется уравнением $y^2 = \frac{b^2}{a} x$. Выделим элементарную

полоску, как показано на рис. 14.47. Масса этой полоски равна ее площади $x dy$, а центр тяжести находится в точке $(x/2; y)$.

Статические моменты полоски:

$$dM_x = x dy \cdot y = xy dy = \frac{a}{b^2} y^3 dy;$$

$$dM_y = x dy \frac{x}{2} = \frac{x^2}{2} dy = \frac{a^2 y^4}{b^4} dy.$$

Площадь параболического сегмента

$$S = \int_a^b x dy = \int_0^b \frac{ay^2}{b^2} dy = \frac{1}{3} ab,$$

откуда, на основании равенств (14.33) и (14.34), находим

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{a^2}{b^4} \int_0^b y^4 dy}{\frac{1}{3} ab} = \frac{\frac{1}{5} a^2 b}{\frac{1}{3} ab} = \frac{3}{5} a;$$

$$y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{a}{b^2} \int_0^b y^3 dy}{\frac{1}{3} ab} = \frac{\frac{1}{4} ab^2}{\frac{1}{3} ab} = \frac{3}{4} b.$$

в) Моменты инерции. Моментом инерции I материальной точки массы m относительно некоторой оси называется произведение массы на квадрат расстояния точки до оси:

$$I = mr^2.$$

Момент инерции суммы точек равен сумме моментов инерции этих точек:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

Если массы не сосредоточены в отдельных точках, а заполняют линию или плоскую фигуру, то для выражения моментов инерции фигур вместо сумм применяют интегралы, т. е. выбирают элемент массы dm , находят его элементарный момент инерции $dI = r^2 dm$, а затем интегрированием определяют момент инерции всей массы:

$$I = \int r^2 dm.$$

Будем исходить из равномерного распределения масс и заменять массы соответствующими длинами, площадями и объемами ($\rho = 1$, т. е. на единицу длины, площади и объема приходится единица массы).

Пусть требуется вычислить живую силу T пластины $OABDO$, вращающейся вокруг оси Oy с угловой скоростью ω (рис. 14.48). Масса dm заштрихованного на рис. 14.48 элемента равна $y dx$; если x — расстояние всех точек элемента до оси вращения, то линейная скорость v любой точки массы dm равна $x\omega$ и живая сила элемента массы

$$dT = \frac{1}{2} dm v^2 = \frac{1}{2} y dx \cdot x^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot y dx \cdot x^2 = \frac{1}{2} \omega^2 dI,$$

так как $y dx \cdot x^2 = x^2 dm$. Здесь dI есть момент инерции заштрихованного на рис. 14.48 элемента относительно оси вращения Oy . Следовательно, живая сила

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \int dI = \frac{1}{2} I \omega^2.$$

Задача 1. Найти момент инерции однородного прямолинейного стержня длины l относительно перпендикулярной оси, проходящей через его середину (рис. 14.49). Линейная плотность стержня (масса единицы длины) равна ρ .

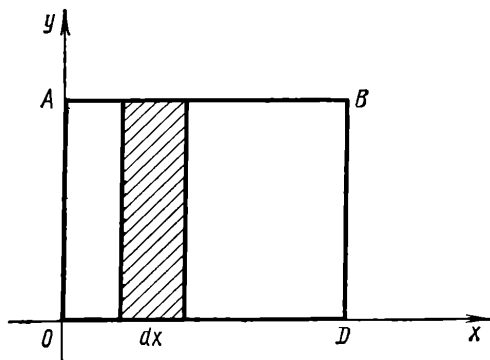


Рис. 14.48

Решение. Элемент длины dx на расстоянии x от середины стержня имеет массу ρdx ; момент инерции элемента $dI = x^2 \rho dx$. Момент инерции всего стержня

$$I = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = 2\rho \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\rho \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{l/2} = \frac{\rho l^3}{12} = m \frac{l^2}{12},$$

где $m = \rho l$ — масса стержня.

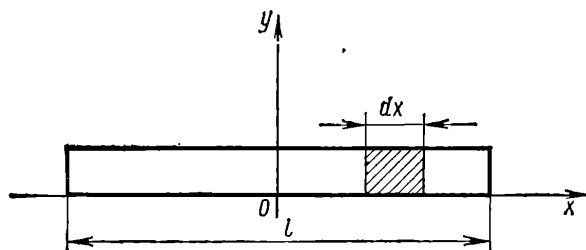


Рис. 14.49

Задача 2. Найти момент инерции однородной прямоугольной пластины со сторонами a и b относительно оси Ox , проходящей через центр пластины и параллельной стороне a (рис. 14.50). Поверхностная плотность $\rho = 1$.

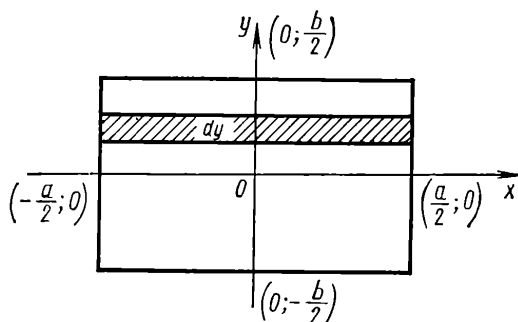


Рис. 14.50

Решение. Поместим начало координат в центре прямоугольника. Масса элемента, заштрихованного на рис. 14.50, равна ady ; момент инерции элемента относительно оси Ox

$$dI = y^2 a dy = ay^2 dy.$$

Следовательно, момент инерции всей фигуры

$$I = a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = 2a \int_0^{b/2} y^2 dy = 2a \left. \frac{y^3}{3} \right|_0^{b/2} = \frac{ab^3}{12} = \frac{mb^2}{12},$$

где $m = ab$ — масса пластинки.

Упражнения

1. Скорость движения тела задана уравнением $v = (6t^2 + 4)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 5 с от начала движения.

Отв. 270 м.

2. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх со скоростью $v = (29,4 - 9,8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.

Отв. 44,1 м.

3. Тело движется прямолинейно по закону $x = ct^3$, где x — длина пути, пройденного за время t , $c = \text{const}$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости, коэффициент пропорциональности равен k . Найти работу, затраченную на преодоление сопротивления среды при перемещении тела от точки $x = 0$ до точки $x = a$.

Отв. $\frac{27}{7} k \sqrt[3]{c^2 a^7}$.

4. Вычислить работу, совершенную при сжатии пружины на 0,06 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 20 Н.

Отв. 3,6 Дж.

5. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы насыпать из песка конус, радиус основания которого $r = 1,2$ м, а высота 1 м.

Отв. ≈ 7380 Дж.

6. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать жидкость удельного веса γ из резервуара, имеющего форму обращенного вершиной вниз конуса высотой h и радиусом основания r . Вычислить аналогичную работу, если конус обращен вершиной вверх.

Отв. 1) $A = \frac{1}{12} \pi \gamma r^2 h^2$; 2) $A = \frac{1}{4} \pi \gamma r^2 h^2$.

7. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из корыта, имеющего форму параболического цилиндра. Высота корыта $h = 1$ м, длина $l = 1,2$ м, ширина по верху $a = 0,75$ м, удельный вес воды $\gamma = 9806,65$ Н/м³.

Отв. $A = \frac{4}{15} a l h^2 \gamma = 2354$ Дж.

8. Шар радиуса r , изготовленный из материала с удельным весом $\gamma = 1$, погружен в воду так, что касается поверхности. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы извлечь шар из воды.

Отв. $A = \frac{4}{3} \pi r^4$.

9. Найти величину давления воды на прямоугольник, вертикально погруженный в воду, если основание его равно 8 м, высота 12 м, а верхнее основание расположено параллельно свободной поверхности воды и находится на глубине 5 м.

Отв. 10335,8 кН $\approx 10,36$ МН.

10. Верхний край шлюза квадратной формы со стороной, равной 8 м, находится на уровне поверхности воды. Определить величину давления на каждую часть шлюза, образуемую давлением одной из диагоналей квадрата.

Отв. 833,6 кН; 1674 кН.

11. Найти давление воды на поверхность шара диаметра 4 м, если его центр находится на глубине 3 м от поверхности воды.

Отв. ≈ 470880 п Н.

12. Вычислить работу, необходимую для того, чтобы выкачать воду из полусферического сосуда, диаметр которого 10 м.

Отв. 2451,66 кН $\approx 2,45$ МН.

13. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы выкачать жидкость плотностью γ из конусообразного резервуара, обращенного вершиной вниз, если высота его H , а радиус основания R .

Отв. $\frac{\pi \gamma R^2 H^2}{12}$.

14. Коническая воронка высотой $h=20$ см наполнена водой. Радиус верхнего отверстия воронки $R=12$ см, нижнего (через которое вытекает вода) $r=0,3$ см. Найти время истечения воды из воронки.

$$\text{Отв. } t = \frac{R^2}{h^2 r^2 \sqrt{2g}} \int_0^{20} y \sqrt{y} dy \approx 64,6 \text{ с.}$$

15. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболой $x^2 + 4y - 16 = 0$ и осью Ox .

Отв. $(0, 8/5)$.

16. Найти центр тяжести дуги астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в I четверти.

$$\text{Отв. } \left(\frac{2}{5} a; \frac{2}{5} a \right).$$

17. Найти центр тяжести объема полушара.

Отв. На оси симметрии, на расстоянии $\frac{3}{8} R$ от основания.

18. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y=0$ при $0 \leq x \leq \pi$.

Отв. $(\pi/2; \pi/8)$.

19. Найти центр тяжести площади фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 20x$, $x^2 = 20y$.

Отв. $(9; 9)$.

20. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 4 - x$ и осью Oy .

$$\text{Отв. } C \left(\frac{8}{5}; 0 \right).$$

21. Найти центр тяжести дуги окружности $x^2 + y^2 = r^2$ в I четверти системы координат.

$$\text{Отв. } C \left(\frac{2r}{\pi}; \frac{2r}{\pi} \right).$$

22. Найти центр тяжести одной арки циклоиды

$$x = r(t - \sin t); y = r(1 - \cos t).$$

$$\text{Отв. } C \left(\pi r; \frac{4r}{3} \right).$$

23. Найти абсциссу центра тяжести дуги кардиоиды $r = a(1 + \cos \varphi)$ в пределах от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

$$\text{Отв. } x_C = \frac{4}{5} a.$$

24. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно стороны b .

$$\text{Отв. } \frac{a^3 b}{12}.$$

25. Найти момент инерции треугольника относительно основания, если оно равно a , а высота треугольника h .

$$\text{Отв. } \frac{ah^3}{12}.$$

26. Найти момент инерции фигуры, ограниченной полувошной синусоидой и осью абсцисс, относительно оси ординат.

$$\text{Отв. } \pi^2 - 1.$$

ГЛАВА XV

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Теория рядов является одним из важнейших разделов высшей математики. Ряды используются в научных исследованиях, многих областях современной математики, а также для практических приближенных вычислений.

При помощи рядов были вычислены важнейшие постоянные (например, трансцендентные числа π и e), составлены таблицы значений функций (таблицы логарифмов, таблицы тригонометрических функций и т. д.). С помощью рядов приближенно вычисляются не берущиеся в конечном виде интегралы, приближенно решаются дифференциальные и интегральные уравнения.

§ 1. ЧИСЛОВОЙ РЯД, СХОДИМОСТЬ И СУММА РЯДА

Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$$

Числовым рядом называется выражение

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (15.1)$$

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются *членами* этого ряда; член u_n называется *общим членом ряда*.

Ряд (15.1) можно записать в компактном виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n. \quad (15.2)$$

Составим из первых членов ряда (15.1) суммы

$$S_1 = u_1, S_2 = u_1 + u_2, S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \dots, S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \dots, \quad (15.3)$$

которые назовем *частичными суммами* данного ряда.

Таким образом, каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$$

Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к конечному пределу S , то ряд называется *сходящимся*, а число S —*суммой* ряда. Если же частичная сумма не имеет конечного предела, то ряд называется *расходящимся*.

В случае сходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S, \quad (15.4)$$

где S —конечное число.

Если ряд сходится, то значение S_n при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S .

Разность $r_n = S - S_n$ называется *остатком ряда*. Равенство (15.4) равносильно равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0, \quad (15.5)$$

т. е. если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю и, наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots$$

Решение. Представим общий член в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2}. \quad (*)$$

Приводя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и приравнявая после этого числители правой и левой частей, получим

$$A(n+2) + B(n+1) = 1,$$

откуда

$$(A+B)n + 2A + B = 1.$$

Сравнивая члены при n и свободные члены, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 2A+B=1, \end{cases}$$

из которой находим $A=1$, $B=-1$. Подставляя эти значения в равенство (*), имеем

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}.$$

Отсюда при $n=1, 2, \dots$ имеем

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \dots$$

Частичную сумму ряда можно преобразовать:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \\ &+ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $n \rightarrow \infty$ $S_n \rightarrow 1/2$, т. е. ряд сходится и сумма его равна $1/2$. Прием, использованный в примере, позволяет установить сходимость, а также найти сумму ряда. Но этот метод применить к большинству рядов не удастся, так как нахождение суммы ряда является задачей весьма сложной.

Теорема. При исследовании ряда на сходимость или расходямость от этого ряда можно отбрасывать или к нему добавлять любое конечное число членов.

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда. Отбросим в этом ряде N членов. Тогда частичная сумма нового ряда равна $S_n - S_N$, где S_N — сумма отброшенных N членов, т. е. конечное число.

Если исходный ряд сходится, то S_n стремится к конечному числу, следовательно, к конечному числу стремится частичная сумма $S_n - S_N$, и новый ряд сходится.

Если же заданный ряд расходится, то частичные суммы S_n и $S_n - S_N$ не имеют конечного предела, и новый ряд расходится. Аналогично обстоит дело и в случае добавления к ряду любого числа членов. При этом частичная сумма $S_n - S_N$ заменяется на $S_n + S_N$.

При отбрасывании и добавлении конечного числа членов сходимость ряда не меняется, меняется лишь его сумма.

§ 2. НЕОБХОДИМЫЙ ПРИЗНАК СХОДИМОСТИ РЯДА

Сформулируем необходимое условие сходимости ряда. Заметим, что так как это условие является только необходимым (но не достаточным) для сходимости ряда, то в случае его выполнения, ряд может и сходиться, и расходиться.

Теорема. Если ряд сходится, то его общий член при неограниченном возрастании номера n стремится к нулю.

Доказательство. Если ряд сходится, то как S_n , так и S_{n-1} стремятся при $n \rightarrow \infty$ к некоторому числу S , следовательно, поскольку $S_n = S_{n-1} + u_n$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Из необходимого признака сходимости вытекает, что если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Так, например, ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n+1},$$

или, в развернутом виде,

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{7} + \frac{3}{5} + \frac{8}{13} + \dots$$

расходится, так как его общий член $2n/(3n+1)$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к $2/3$ (к числу, отличному от нуля).

Если общий член ряда стремится к нулю, то ничего определенного о сходимости ряда сказать еще нельзя.

§ 3. БЕСКОНЕЧНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Исследуем на сходимость бесконечную геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n.$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии при $q \neq 1$ может быть вычислена по формуле

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Если $|q| < 1$, то S_n стремится к конечному числу $\frac{a}{1-q}$, так как в этом случае $q^n \rightarrow 0$, и ряд сходится.

Если $|q| > 1$, то $q^n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, следовательно, $S_n \rightarrow \infty$, и в этом случае ряд расходится.

Если $q = 1$, то $S_n = na$ ($a \neq 0$) и также стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$; следовательно, ряд расходится.

Наконец, если $q = -1$, то $S_n = 0$ при n четном и $S_n = a$ при n нечетном, т. е. предел S_n при $n \rightarrow \infty$ не существует и ряд расходится.

Итак, *бесконечная убывающая геометрическая прогрессия* является сходящимся рядом при $|q| < 1$, т. е. если знаменатель прогрессии по модулю меньше единицы. В остальных случаях геометрическая прогрессия расходится.

§ 4. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД

Рассмотрим ряд, который расходится, хотя необходимый признак сходимости выполняется, а именно, ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots, \quad (15.6)$$

называемый *гармоническим рядом*. Каждый член этого ряда, начиная со второго, является средним гармоническим двух соседних членов, причем число b называется средним гармоническим чисел a и c , если

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right).$$

Общий член гармонического ряда $u_n = 1/n$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Сгруппируем члены ряда следующим образом:

$$1 + \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots, \quad (15.7)$$

т. е. если первую скобку считать за первую группу, вторую — за вторую группу и т. д., то в каждой группе берем по 2^{k-1} членов, где k — номер группы. Уменьшим члены ряда, заменив в каждой группе все слагаемые последним:

$$1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots,$$

или

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots. \quad (15.8)$$

Частичная сумма ряда (15.8) $S_n = 1 + (n-1) \cdot \frac{1}{2}$ стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Частичная же сумма соответствующего числа членов ряда (15.6) или (15.7) будет больше, чем у ряда (15.8). Следовательно, она тем более стремится к бесконечности, т. е. ряд (15.6) расходится.

§ 5. СВОЙСТВА РЯДОВ

Свойство 1. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (15.9)$$

сходится и имеет сумму S , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n, \quad (15.10)$$

где a — некоторое постоянное число, также сходится и имеет сумму aS .

Доказательство. Из сходимости ряда (15.9) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Частичная сумма ряда (15.10) имеет вид

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \dots + au_n = a(u_1 + u_2 + \dots + u_n) = aS_n.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} aS_n = aS,$$

т. е. ряд (15.10) сходится и имеет сумму aS .

Свойство 2. Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е. если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (15.11)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (15.12)$$

сходятся и имеют соответственно суммы s и σ , то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) \quad (15.13)$$

также сходится и имеет сумму $s \pm \sigma$.

Доказательство. Обозначая n -е частичные суммы рядов (15.11), (15.12) и (15.13) соответственно через s_n , σ_n и S_n и учитывая, что $S_n = s_n \pm \sigma_n$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma.$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n \pm \sigma_n) = s \pm \sigma.$$

Упражнения

Найти сумму ряда:

1. $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$.

Отв. $3/2$.

2. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$.

Отв. 1 .

3. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$.

Отв. $1/3$.

4. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$.

Отв. $1/2$.

5. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$.

Отв. $1/4$.

Написать формулу общего члена ряда:

6. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} + \dots$.

7. $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} + \frac{1}{5 \cdot 4^5} + \dots$.

8. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \frac{16}{81} + \frac{25}{243} + \dots$.

§ 6. ДОСТАТОЧНЫЕ ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

Выведем основные достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами. Выполнение условия соответствующего признака влечет за собой сходимость ряда, в случае невыполнения — вопрос о сходимости остается открытым: ряд может или сходиться или расходиться.

1. Признак сравнения рядов

Теорема. *Даны два ряда с положительными членами:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0), \quad (15.14)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (v_n > 0). \quad (15.15)$$

Пусть каждый член первого ряда не превосходит соответствующего члена второго ряда:

$$u_1 \leq v_1, \quad u_2 \leq v_2, \quad \dots, \quad u_n \leq v_n, \quad \dots \quad (15.16)$$

и второй ряд сходится. Тогда первый ряд также сходится.

Доказательство. Составим частичные суммы рядов (15.14) и (15.15):

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n, \\ \sigma_n &= v_1 + v_2 + \dots + v_n. \end{aligned}$$

Из неравенств (15.16) следует, что

$$S_n \leq \sigma_n. \quad (15.17)$$

Члены обоих рядов положительны, поэтому S_n и σ_n возрастают с возрастанием n , т. е. S_n и σ_n — монотонно возрастающие переменные.

Из сходимости ряда (15.15) следует, что σ_n стремится к конечному пределу σ . Кроме того, так как σ_n — монотонно возрастающая переменная, то

$$\sigma_n < \sigma. \quad (15.18)$$

Из неравенств (15.17) и (15.18) следует, что

$$S_n < \sigma. \quad (15.19)$$

Монотонно возрастающая переменная S_n оказалась ограниченной сверху. Значит, S_n стремится к конечному пределу и ряд (15.14) сходится.

Следствие. Если ряд (15.14) расходится, то ряд (15.15) также расходится. Действительно, если бы ряд (15.15) сходил, то, согласно доказанному признаку, ряд (15.14) должен также сходиться, что противоречит условию.

Неравенства (15.16) могут выполняться, начиная с некоторого номера N : $u_N \leq v_N$, $u_{N+1} \leq v_{N+1}$, ...; выполнение же неравенств для первых членов рядов не обязательно. Действительно, если для первых $N-1$ членов неравенства не выполняются, то в рядах (15.14) и (15.15) эти члены можно отбросить. Тогда во вновь полученных рядах указанные неравенства выполняются, начиная с первых членов, и ряд сходится. Следовательно, на основании теоремы, доказанной в § 1, ряд (15.14) также сходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \dots$$

Решение. Очевидно, что

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1}.$$

Дробь, находящаяся в левой части последнего неравенства, представляет собой общий член заданного ряда, а дробь, находящаяся в правой части, является общим членом гармонического ряда, который расходится. Поэтому, на основании доказанного выше следствия, заданный ряд также расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 9} + \frac{1}{3 \cdot 27} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^n} + \dots$$

Решение. Сравнивая общий член заданного ряда с общим членом ряда

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots, \quad (*)$$

при $n > 1$ имеем

$$\frac{1}{3^n} > \frac{1}{n \cdot 3^n}.$$

Ряд (*) представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q = 1/3$, т. е. ряд сходится. Согласно признаку сравнения рядов заданный ряд также сходится.

2. Признак Даламбера

Рассмотрим ряд с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (u_n > 0). \quad (15.20)$$

Обозначим отношение последующего члена ряда к предыдущему через

$$\delta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Тогда, если последовательность

$$\delta_1 = \frac{u_2}{u_1}, \quad \delta_2 = \frac{u_3}{u_2}, \quad \dots, \quad \delta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \dots \quad (15.21)$$

с возрастанием n стремится к конечному пределу r :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = r,$$

то при $r < 1$ ряд (15.21) сходится, а при $r > 1$ — расходится.

Доказательство. Так как r является пределом последовательности (15.21), то для произвольного сколь угодно малого числа ε можно подобрать такой номер N , начиная с которого

$$|\delta_n - r| < \varepsilon,$$

или

$$r - \varepsilon < \delta_n < r + \varepsilon. \quad (15.22)$$

а) Пусть $r < 1$. Выберем ε так, чтобы значение $r + \varepsilon$ было меньше единицы. Из правой части неравенства (15.22) для $n \geq N$ имеем

$$\delta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} < r + \varepsilon,$$

следовательно,

$$u_{N+1} < (r + \varepsilon) u_N, \quad u_{N+2} < (r + \varepsilon) u_{N+1}.$$

Учитывая эти неравенства, имеем

$$u_{N+2} < (r + \varepsilon)^2 u_N.$$

Аналогично находим, что

$$u_{N+3} < (r + \varepsilon)^3 u_N$$

и т. д.

Таким образом, члены ряда

$$u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \dots \quad (15.23)$$

меньше соответствующих членов ряда

$$(r + \varepsilon)u_N + (r + \varepsilon)^2 u_N + (r + \varepsilon)^3 u_N + \dots \quad (15.24)$$

Ряд (15.24) представляет собой геометрическую прогрессию, знаменатель которой $r + \varepsilon$ меньше единицы, следовательно, ряд сходится. В силу признака сравнения ряд (15.23) также сходится. Но ряды (15.14) и (15.23) отличаются конечным числом первых членов. Следовательно, сходится и ряд (15.14).

б) Пусть $r > 1$. Выберем ε так, чтобы выполнялось неравенство $r - \varepsilon > 1$. Тогда при $n \geq N$ имеем

$$\delta_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} > r - \varepsilon > 1,$$

при этом $u_{n+1} > u_n$. Члены ряда, начиная с некоторого номера, возрастают, т. е. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

Решение. Общий член ряда

$$u_n = \frac{n}{2^n}. \quad (*)$$

Член u_{n+1} можно получить, заменив в равенстве (*) n на $n+1$:

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}.$$

Тогда имеем

$$\delta_n = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n \sqrt{n}}.$$

Решение. Здесь

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3^n}{2^n \sqrt{n}}, \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{n+1}}, \\ \text{откуда} \quad \delta_n &= \frac{3^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{n+1}} \cdot \frac{2^n \sqrt{n}}{3^n} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{n}{n+1}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= \frac{3}{2} > 1. \end{aligned}$$

Исследуемый ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

Решение. Здесь

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \\ \text{и} \quad \delta_n &= \sqrt{\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}} = \sqrt{\frac{n}{n+2}}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n &= 1. \end{aligned}$$

Признак Даламбера не дает ответа на вопрос, сходится ли данный ряд или расходится. Исследование этого ряда ранее с помощью признака сравнения показало, что ряд расходится.

3. Признак Коши (радикальный)

Ряд с положительными членами сходится, если $\sqrt[n]{u_n}$, начиная с некоторого значения n , меньше числа q , заключенного между нулем и единицей.

Ряд с положительными членами расходится, если $\sqrt[n]{u_n}$ становится и остается далее большим или равным единице.

Доказательство. Если, начиная с некоторого значения n ,

$$\sqrt[n]{u_n} < q, \text{ или } u_n < q^n \quad (0 < q < 1),$$

то это означает, что с этого места члены данного ряда меньше соответствующих членов убывающей геометрической прогрессии $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Следовательно, согласно признаку сравнения, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

Если же

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1, \text{ или } u_n \geq 1,$$

то $\lim u_n \neq 0$, и ряд расходится.

Следствие. Если при $n \rightarrow \infty$

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = r,$$

то при $r < 1$ ряд сходится, при $r > 1$ — расходится, при $r = 1$ ряд может и сходиться, и расходиться.

Действительно, если $\lim \sqrt[n]{u_n} = r < 1$, то для любого числа q ($0 < q < 1$) можно подобрать такое целое число m , что при $n \geq m$ справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{u_n} < q.$$

Если $\lim \sqrt[n]{u_n} = r > 1$, то аналогично имеем

$$\sqrt[n]{u_n} > q \quad (1 < q < r, \quad n \geq m).$$

При $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ определенного вывода сделать нельзя.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{3^n + 1} + \dots$$

Решение. Здесь

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{3^n + 1}} < \frac{1}{3} \quad \text{при } n \geq 1.$$

Следовательно, ряд сходится.

4. Интегральный признак Коши

Признаки Даламбера и Коши очень просты, однако их не всегда можно использовать. В этом случае применяют интегральный признак Коши.

Если члены ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (15.25)$$

можно рассматривать как значения некоторой положительной, непрерывной, монотонно убывающей на интервале $1 \leq x < +\infty$ функции $y = f(x)$, так что

$$u_1 = f(1), \quad u_2 = f(2), \quad u_3 = f(3), \quad \dots, \quad u_n = f(n), \quad \dots,$$

то:

а) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится, то сходится и ряд (15.25);

б) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ расходится, то ряд (15.25) также расходится.

Функция $f(x)$ должна убывать, так как в противном случае члены ряда (15.25) не будут стремиться к нулю и ряд заведомо расходится. Требование положительности функции $f(x)$ равносильно тому, что рассматриваемый ряд является рядом с положительными членами.

Доказательство. Построим график функции $y = f(x)$ в промежутке $[1, n+1]$ (рис. 15.1). Тогда, как видно из рисунка, площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции,

прямыми $x=1$, $x=n+1$ и осью абсцисс, выражается интегралом

$$I_n = \int_1^{n+1} f(x) dx \quad (15.26)$$

и заключается между площадями вписанной в криволинейную трапецию и описанной около нее ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников. Суммы их площадей соответственно равны:

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n), \quad (15.27)$$

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n+1). \quad (15.28)$$

Сумма (15.27) является частичной суммой S_n , а сумма (15.28) равна $S_{n+1} - f(1)$, следовательно, справедливо неравенство

$$S_{n+1} - f(1) < I_n < S_n. \quad (15.29)$$

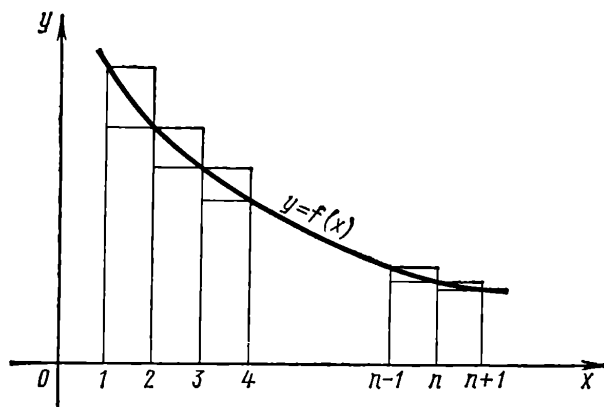


Рис. 15.1

Так как с увеличением n увеличивается площадь криволинейной трапеции (соответственно количество прямоугольников), то переменные I_n , S_n и S_{n+1} являются монотонно возрастающими.

Рассмотрим следующие случаи.

а) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходится. Тогда I_n при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному пределу I , причем

$$I_n < I. \quad (15.30)$$

Из неравенств (15.29) и (15.30) получаем

$$S_{n+1} < f(1) + I_n < f(1) + I,$$

т. е. монотонно возрастающая переменная S_{n+1} ограничена сверху. Следовательно, ряд (15.25) сходится.

б) Пусть несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Тогда I_n стремится к бесконечности при $n \rightarrow \infty$, следовательно, правая часть неравенства (15.29) также стремится к бесконечности, т. е. ряд (15.25) расходится.

В рассматриваемом интеграле в качестве нижнего предела можно брать любое положительное число a . Это равносильно отбрасыванию нескольких членов, что на сходимость ряда не влияет. Нижний предел выбирается так, чтобы в промежутке $[a, \infty]$ функция $f(x)$ была определена и непрерывна.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{3}{13} + \dots + \frac{n}{n^2+4} + \dots$$

Решение. Здесь $u_n = \frac{n}{n^2+4}$, следовательно,

$$f(x) = \frac{x}{x^2+4}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+4} dx &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{xdx}{x^2+4} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+4) \Big|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [\ln(b^2+4) - \ln 5] = \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, заданный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}.$$

Решение. Имеем

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2 \ln^2 x} \right]_2^b = -\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln^2 b} - \frac{1}{\ln^2 2} \right) = \frac{1}{2 \ln^2 2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 3. С помощью интегрального признака исследовать при различных значениях k на сходимость обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}.$$

Решение. Заметим, что при $k=1$ данный ряд является гармоническим и расходится. Пусть $k \neq 1$. Тогда

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^k} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-k}}{1-k} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^{1-k} - 1}{1-k}.$$

Этот предел равен конечному числу при $k > 1$ и равен бесконечности при $k < 1$ (так как при $k > 1$ показатель степени $1-k$ является отрицательной величиной и b^{1-k} стремится к нулю при $b \rightarrow \infty$; если же $k < 1$, то $1-k > 0$ и $b^{1-k} \rightarrow \infty$ при $b \rightarrow \infty$).

Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$ при $k > 1$ сходится, а при $k < 1$ — расходится.

Упражнения

С помощью признака сравнения исследовать на сходимость следующие ряды:

$$1. \ 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \dots$$

Отв. Ряд расходится.

$$2. \ 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$3. \ \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

С помощью признака Даламбера исследовать на сходимость следующие ряды:

$$4. \ \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$5. \ \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n n!} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$6. \ 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

С помощью радикального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

$$7. \ \frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{156}{16} + \dots + \frac{n^3}{2^n} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$8. \ \frac{\ln 2}{4} + \frac{\ln 3}{8} + \frac{\ln 4}{16} + \frac{\ln 5}{32} + \dots + \frac{\ln(n+1)}{2^{n+1}} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость следующие ряды:

$$9. \ \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Отв. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}$. Ряд сходится.

$$10. \ \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n(n+1)} + \dots$$

Отв. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$. Ряд сходится.

§ 7. ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ. ОЦЕНКА ОСТАТКА РЯДА

Рассмотрим ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены. ЗнакочереДУЮЩИЕСЯ ряды исследуют на сходимость с помощью достаточного признака сходимости Лейбница.

Признак Лейбница. Если в знакочереДУЮЩЕМся ряде абсолютные величины членов убывают (стремятся к нулю), то такой ряд сходится, и сумма его по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого члена, а остаток по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины первого отброшенного члена ряда.

Доказательство. Рассмотрим знакопеременный ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots, \quad (15.31)$$

члены которого положительны и убывают, т. е.

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_{n-1} > u_n > \dots, \quad (15.32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0. \quad (15.33)$$

Составим частичную сумму четного числа членов ряда:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}). \quad (15.34)$$

В силу неравенств (15.32) все разности в скобках положительны. Если составить $S_{2(m+1)}$, то к значению S_{2m} прибавится разность $u_{2m+1} - u_{2m+2}$, т. е. к частичной сумме S_{2m} прибавляется положительная величина. Следовательно, $S_{2m} < S_{2(m+1)}$ и S_{2m} является монотонно возрастающей переменной. Запишем частичную сумму S_{2m} следующим образом:

$$S_{2m} = u_1 - [(u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m}].$$

Разность в квадратных скобках положительна, поэтому $S_{2m} < u_1$ (для любого m). Итак, монотонно возрастающая переменная S_{2m} ограничена сверху числом u_1 . Следовательно, S_{2m} стремится к конечному пределу S .

Рассмотрим сумму нечетного числа членов

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1}.$$

По условию u_{2m+1} стремится к нулю, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} u_{2m+1} = S + 0 = S.$$

Таким образом, частичная сумма четного числа членов S_{2m} и нечетного числа членов S_{2m+1} стремятся к конечному числу S . Следовательно, ряд (15.31) сходится и имеет сумму S . Покажем, что S_{2m+1} стремится к S , убывая. Действительно,

$$S_{2m+1} - S_{2m-1} = -(u_{2m} - u_{2m+1}) < 0,$$

или

$$S_{2m+1} < S_{2m-1}.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$S_{2m} < S < S_{2m+1}.$$

В частности, при $m = 0$ имеем $S < S_1$. Так как $S_1 = u_1$, то $S < u_1$, т. е. сумма ряда по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины его первого члена.

Составим остаток ряда

$$r_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm \dots,$$

который представляет собой знакочередующийся ряд. Согласно доказанному, его сумма по абсолютной величине не превосходит абсолютной величины его первого отбрасываемого члена

$$|r_n| < |u_{n+1}|.$$

Признак Лейбница дает возможность установить сходимость ряда и позволяет оценить погрешность при приближенных вычислениях с помощью знакочередующихся рядов. Если первый член знакочередующегося ряда положительный, то, ограничиваясь при вычислениях четным числом членов, получаем результат с недостатком, а при нечетном числе членов — с избытком.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Решение. Ряд сходится, так как он знакочередующийся, общий член $(-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ по абсолютной величине равен $\frac{1}{n}$ и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Сумма ряда меньше единицы, сумма отброшенных членов (остаток) ряда не превосходит $1/10$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)!} + \dots$$

Решение. Ряд сходится, так как его члены убывают по абсолютной величине и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(2n-1)!} = 0.$$

Остаток ряда

$$|r_n| < \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Если при приближенном вычислении суммы этого ряда ограничиться тремя первыми членами, то ошибка

$$|r_3| < \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 0,0002.$$

Упражнения

С помощью признака Лейбница исследовать на сходимость следующие ряды:

1. $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$

Отв. Ряд сходится.

2. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$

Отв. Ряд сходится.

3. $1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$

Отв. Ряд сходится.

$$4. \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$5. \frac{2}{3} - \frac{4}{8} + \frac{8}{15} - \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$6. 1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \dots$$

Отв. Ряд сходится.

$$7. 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots$$

Отв. Ряд сходится.

§ 8. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ РЯДЫ

Перейдем к исследованию рядов с членами, знаки которых произвольны. Ряды с членами произвольных знаков называются *знакопеременными рядами*. Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов. Докажем следующую теорему.

Теорема. *Знакопеременный ряд*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (15.35)$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин членов знакопеременного ряда:

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots \quad (15.36)$$

Доказательство. Пусть S_n — частичная сумма ряда (15.35); σ — частичная сумма ряда (15.36). Обозначим через S_n^+ сумму положительных слагаемых в частичной сумме S_n ряда (15.35), а через S_n^- — сумму абсолютных величин отрицательных слагаемых. Тогда

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \quad \sigma_n = S_n^+ + S_n^-,$$

следовательно,

$$S_n^+ \leq \sigma_n, \quad S_n^- \leq \sigma_n. \quad (15.37)$$

По условию ряд (15.36) сходится. Пусть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma, \quad \sigma_n \leq \sigma.$$

Из неравенств (15.37) следует, что

$$S_n^+ \leq \sigma_n < \sigma, \quad S_n^- \leq \sigma_n \leq \sigma.$$

Итак, возрастающие переменные S_n^+ и S_n^- (как суммы положительных слагаемых) ограничены сверху.

По признаку существования предела возрастающей и ограниченной сверху переменной следует, что при $n \rightarrow \infty$ суммы S_n^+ и S_n^- имеют конечный предел. Тогда частичная сумма $S_n = S_n^+ - S_n^-$ также имеет при $n \rightarrow \infty$ конечный предел и знакопеременный ряд (15.35) сходится.

§ 9. АБСОЛЮТНАЯ И УСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ

Рассмотрим ряд с произвольными членами.

Теорема. *Знакопеременный ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (15.38)$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|. \quad (15.39)$$

Доказательство. Введем величины

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} \quad \text{и} \quad w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2},$$

которые при любом n являются положительными или равными нулю, так как величина v_n совпадает с u_n при $u_n > 0$ и равна нулю, при $u_n < 0$; величина w_n равна нулю, при $u_n > 0$ и совпадает со значением $|u_n|$ при $u_n < 0$. Следовательно, v_n и w_n никогда не превосходят $|u_n|$ и из сходимости ряда (15.39) по признаку сравнения вытекает сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$. Тогда схо-

дится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n)$, т. е. ряд (15.38), так как $v_n - w_n = u_n$.

Таким образом, если сходится ряд (15.39), то ряд (15.38) также сходится. Обратное неверно, т. е. ряд (15.38) может сходиться, а ряд (15.39) — расходиться. Теорема доказана.

Если наряду со сходимостью знакопеременного ряда сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов, то такой знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то такой ряд называется *условно сходящимся*.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Решение. Ряд сходится условно, так как по признаку Лейбница ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

расходится, поскольку является гармоническим.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{4\sqrt{4}} + \dots$$

Решение. Ряд сходится абсолютно, так как он сходится по признаку Лейбница, а ряд из абсолютных величин его членов тоже сходится, поскольку этот ряд получается из соотношения

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \text{ при } k = \frac{3}{2}.$$

Упражнения

Выяснить, какие ряды сходятся абсолютно, и какие условно:

$$1. \frac{1}{3} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 - \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Отв. Ряд сходится абсолютно.

$$2. \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Отв. Ряд сходится условно.

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot n^n}{(2n+1)^n}.$$

Отв. Ряд сходится абсолютно.

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Отв. Ряд сходится условно.

§ 10. ДЕЙСТВИЯ НАД РЯДАМИ

Рассмотрим простейшие правила действий над сходящимися рядами и их основные свойства, опуская при этом доказательства.

1. Умножение ряда на число. Под произведением сходящегося ряда

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

на число λ понимается ряд, образованный из произведений каждого члена данного ряда на это число:

$$\lambda u_1 + \lambda u_2 + \dots + \lambda u_n + \dots$$

Этот ряд также сходится, и его сумма равна λS .

Итак, если все члены сходящегося ряда умножить на одно и то же число, то получается новый ряд, сумма которого равна произведению суммы данного ряда на это число.

2. Суммирование двух рядов. Под суммой двух сходящихся рядов

$$S_I = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

и

$$S_{II} = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

понимается ряд, образованный из сумм соответствующих членов данных рядов:

$$(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + \dots + (u_n + v_n) + \dots$$

Этот ряд также сходится и его сумма равна $S_I + S_{II}$.

Аналогично, сумма разности рядов $\sum_n (u_n - v_n)$ равна разности сумм рядов $\sum_n u_n - \sum_n v_n$.

3. Сочетательное свойство сходящегося ряда. Члены сходящегося ряда можно группировать любым образом. В результате получаются также сходящиеся ряды с одинаковой суммой.

Пусть дан сходящийся ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Образуем новый ряд, объединяя в группы последовательные члены ряда:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + u_{n_1+2} + \dots + u_{n_2}) + \dots + \\ + (u_{n_{m-1}+1} + u_{n_{m-1}+2} + \dots + u_{n_k}) + \dots,$$

или сокращенно

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_k + \dots,$$

где $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k, \dots$ — соответственно значения первой, второй, третьей, ..., k -й, ... скобок. Этот ряд также сходится и его сумма равна S .

4. Переместительное свойство сходящегося ряда. Если в абсолютно сходящемся ряде переставить местами члены, то вновь полученные ряды также абсолютно сходятся и их суммы равны сумме первоначального ряда. Иначе, сумма абсолютно сходящегося ряда не меняется от перемены мест слагаемых. Сформулированное свойство не выполняется для условно сходящихся рядов.

Пусть дан абсолютно сходящийся ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Образуем новый ряд

$$u_{n_1} + u_{n_2} + \dots + u_{n_k} + \dots,$$

где $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ — члены натурального ряда в любом порядке.

Этот ряд также сходится абсолютно и его сумма равна S .

5. Произведение двух сходящихся рядов. Пусть даны два ряда

$$S_I = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$S_{II} = v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

Под их произведением понимается ряд, образованный из всевозможных парных произведений членов данных рядов, расположенных в следующем порядке:

$$(u_1 \cdot v_1) + (u_1 \cdot v_2 + u_2 \cdot v_1) + (u_1 \cdot v_3 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_1) + \dots + \\ + (u_1 \cdot v_n + u_2 \cdot v_{n-1} + \dots + u_{n-1} \cdot v_2 + u_n \cdot v_1) + \dots$$

В каждой группе членов этого ряда сумма индексов сомножителей постоянна: в первой скобке $1+1=2$, во второй скобке $1+2=2+1=3$, в третьей скобке $1+3=2+2=3+1=4$, ..., в n -й скобке $1+n=2+n-1=\dots=n-1+2=n+1=1+n$.

6. Произведение двух абсолютно сходящихся рядов. Два абсолютно сходящихся ряда можно перемножить по правилу умножения конечных сумм. Полученный ряд является абсолютно сходящимся, а его сумма равна произведению сумм перемножаемых рядов:

$$S = S_I \cdot S_{II}.$$

Из этого свойства вытекает, что абсолютно сходящиеся ряды можно возводить в целую положительную степень (так как возведение в степень равносильно перемножению несколько раз одинаковых рядов).

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

§ 1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Ряд называется *функциональным*, если его членами являются функции независимой переменной. Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (16.1)$$

где функции $u_n(x)$ определены в области изменения x . Для одних значений x ряд может сходиться, для других — расходиться.

Функциональный ряд (16.1) называется *сходящимся в точке x_0* , если при $x = x_0$ он обращается в сходящийся числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots \quad (16.2)$$

Ряд называется *расходящимся* в точке x_0 , если этот ряд в данной точке расходится.

Значение $x = x_0$, при котором ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

сходится, называется *точкой сходимости ряда*. Совокупность точек сходимости называется *областью сходимости ряда*.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + \dots,$$

члены которого являются произведением постоянных на степенные функции (с целыми показателями степеней) от разности $x - x_0$. В частности, при $x_0 = 0$ получается ряд от самой независимой переменной x :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

Постоянные $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *коэффициентами* степенного ряда.

§ 2. ТЕОРЕМА АБЕЛЯ

Рассмотрим степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (16.3)$$

Теорема Абеля. Если ряд (16.3) сходится при $x = x_0$, отличном от нуля, то этот ряд сходится абсолютно для всякого значения x ,

которое по абсолютной величине меньше $|x_0|$. Если же ряд (16.3) при $x=x_0$ расходится, то он расходится для всякого значения x , абсолютная величина которого больше $|x_0|$.

Доказательство. Пусть x_0 — точка сходимости ряда (16.3), т. е. сходится степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n.$$

В силу необходимого признака сходимости общий член ряда стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0.$$

По определению предела для любого положительного числа c найдется такой номер N , начиная с которого

$$|a_n x_0^n| < c.$$

Возьмем любое x , для которого $|x| < |x_0|$, и обозначим

$$q = \left| \frac{x}{x_0} \right|.$$

В этом случае $q < 1$. Пусть $n \geq N$, тогда можно записать следующие соотношения:

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < c q^n.$$

Члены ряда

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n x^n| \tag{16.4}$$

меньше соответствующих членов ряда $\sum_{n=N}^{\infty} c q^n$, который является геометрической прогрессией со знаменателем $q < 1$ и, следовательно, сходится. По признаку сравнения рядов сходится и ряд (16.4), поэтому сходится также ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|, \tag{16.5}$$

который отличается от ряда (16.4) конечным числом членов. Таким образом, ряд (16.3) сходится абсолютно.

Вторую часть теоремы Абеля докажем от противного. Пусть ряд (16.3) при $x=x_0$ расходится. Предположим, что существует значение x_1 по абсолютной величине большее $|x_0|$, при котором ряд (16.3) сходится. В силу доказанной первой части теоремы, ряд (16.3) должен сходиться при всех x , абсолютная величина которых меньше $|x_1|$, в том числе при $x=x_0$, а по условию ряд (16.3) при $x=x_0$ расходится. Следовательно, такого значения x_1 не существует и при всех x , для которых $|x| > |x_0|$, ряд расходится.

§ 3. РАДИУС И ПРОМЕЖУТОК СХОДИМОСТИ СТЕПЕННОГО РЯДА

Из теоремы Абеля следует, что если степенной ряд сходится при некотором значении x_0 , то этот ряд абсолютно сходится в промежутке изменения x от $-|x_0|$ до $|x_0|$. Если при некотором $x = x_1$ степенной ряд расходится, то он расходится для всех значений x , удовлетворяющих неравенствам $x < -|x_1|$ и $x > |x_1|$. Для степенного ряда можно найти такое положительное число R , что при x , расположенных в промежутке от $-R$ до R ряд сходится, а при значениях x , расположенных вне этого промежутка, — расходится. Число R называется *радиусом сходимости*, а промежуток от $-R$ до R называется *интервалом сходимости*. На границах интервала сходимости, т. е. при $x = \pm R$, степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Для уточнения интервала сходимости (интервалом сходимости может быть открытый или полуоткрытый промежуток) дополнительно исследуют сходимость ряда на границах интервала.

Таким образом, область сходимости степенного ряда может отличаться от его интервала сходимости не более чем двумя точками $x = \pm R$.

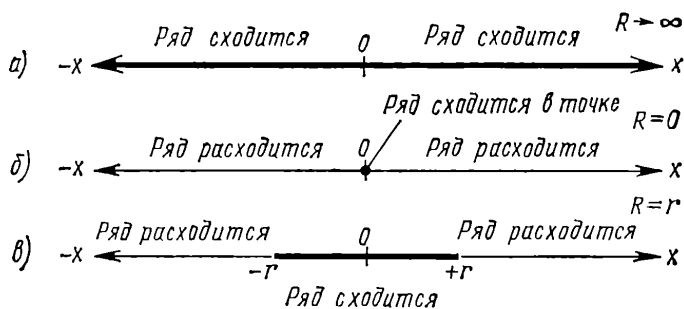


Рис. 16.1

Если степенной ряд сходится при всех x , то интервалом сходимости является ось Ox и $R = \infty$ (рис. 16.1, а). Если ряд при всех x , отличных от нуля, расходится, то интервал сходимости состоит из одной точки $x = 0$ и радиус сходимости в этом случае $R = 0$ (рис. 16.1, б). Если ряд при одних x сходится, а при других расходится, то R есть некоторое положительное число, а интервалом сходимости является отрезок оси Ox , симметричный относительно точки $x = 0$ (рис. 16.1, в).

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда можно пользоваться признаком Даламбера. При этом (согласно теореме Абеля) если степенной ряд при положительных значениях x из промежутка $0 \leq x < x_1$ сходится или расходится, то этот ряд соответственно сходится или расходится для отрицательных значений x из промежутка $-x_1 < x \leq 0$. Например, при исследовании ряда

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ можно применять признак Даламбера, т. е. искать предел отношения абсолютных величин последующего члена и предыдущего. Если этот предел меньше единицы, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно, если больше единицы, то ряд расходится.

Пример 1. Найти интервал сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Решение. Воспользовавшись признаком Даламбера, вычислим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

который меньше единицы, независимо от значений x . Данный ряд сходится абсолютно при любых x . Радиус сходимости ряда $R = \infty$. Интервалом сходимости является вся ось Ox .

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}.$$

Решение. По признаку Даламбера имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) 3^{n+1}}}{\frac{x^n}{n 3^n}} \right| = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3}.$$

Рассматриваемый ряд при $\frac{|x|}{3} < 1$, т. е. при $|x| < 3$, сходится, при $|x| > 3$ расходится. Радиус сходимости ряда $R = 3$. При $x = 3$ ряд является гармоническим, а при $x = -3$ превращается в сходящийся ряд.

Итак, область сходимости данного ряда $-3 \leq x < 3$.

Пример 3. Найти интервал сходимости ряда

$$1 + 2!x + 3!x^2 + \dots + n!x^{n-1} + \dots$$

Решение. Составим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^n}{n! x^{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(n+1)x| = \infty.$$

Ряд при любом значении x (кроме $x = 0$) расходится, радиус сходимости ряда $R = 0$.

§ 4. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ СТЕПЕННОГО РЯДА

Теорема. *Ряды, полученные дифференцированием или интегрированием степенного ряда, имеют тот же радиус сходимости, что и исходный степенной ряд.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R , следовательно, предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \quad (16.6)$$

меньше единицы при $|x| < R$ и больше единицы при $|x| > R$.

Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ существует. Дифференцируя ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \quad (16.7)$$

Применим признак Даламбера для ряда (16.7), тогда получим предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) a_{n+1} x^n}{n a_n x^{n-1}} \right|. \quad (16.8)$$

Далее имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1) a_{n+1} x^n}{n a_n x^{n-1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

следовательно, пределы (16.8) и (16.6) равны. Это значит, что предел (16.8) меньше единицы при $|x| < R$ и больше единицы при $|x| > R$. Следовательно, ряд (16.7) имеет радиус сходимости R , т. е. радиус сходимости при дифференцировании ряда не меняется.

Докажем, что радиус сходимости не меняется при интегрировании ряда. Действительно, пусть ряд, полученный интегрированием

ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, имеет радиус сходимости R_1 . Дифференцируя этот

ряд, получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, который, согласно доказанному, должен также иметь радиус сходимости R_1 , но, по предположению, радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен R . Таким образом, $R_1 = R$.

Степенной ряд можно дифференцировать внутри интервала сходимости. Границы после дифференцирования могут из области сходимости выпасть.

Если ряд сходится в замкнутой области $[-R, R]$, то после дифференцирования ряд может в точке $x = -R$ или в точке $x = +R$ расходиться.

Упражнения

Найти интервалы сходимости следующих степенных рядов:

1. $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$

Отв. $(-1, 1)$.

2. $\frac{1}{2}x + \frac{2^2}{2^2}x^2 + \frac{3^3}{2^3}x^3 + \frac{4^4}{2^4}x^4 + \dots + \frac{n^n}{2^n}x^n + \dots$

Отв. Ряд расходится всюду, кроме точки $x=0$.

3. $1 + \frac{3}{2}x + \frac{3^2}{3}x^2 + \frac{3^3}{4}x^3 + \dots + \frac{3^n}{n+1}x^n + \dots$

Отв. $(-1/3, 1/3)$.

4. $1 + \frac{2x}{3^2\sqrt{3}} + \frac{4x^2}{5^2\sqrt{3^2}} + \frac{8x^3}{7^2\sqrt{3^3}} + \dots$

Отв. $(-\sqrt{3}/2; \sqrt{3}/2)$.

5. $1 + \frac{2x}{\sqrt{5 \cdot 5}} + \frac{4x^2}{\sqrt{9 \cdot 5^2}} + \frac{8x^3}{\sqrt{13 \cdot 5^3}} + \dots$

Отв. $(-\sqrt{5}/2, \sqrt{5}/2)$.

Найти области сходимости следующих степенных рядов:

6. $\frac{x}{1 \cdot 3} + \frac{x^2}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 3^3} + \frac{x^4}{4 \cdot 3^4} + \dots$

Отв. $-3 \leq x \leq 3$.

7. $\frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{8} + \frac{8x^4}{15} + \dots$

Отв. $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

8. $\frac{2x}{2 \cdot 3^2} + \frac{3x^2}{2^2 \cdot 3^3} + \frac{4x^3}{2^3 \cdot 3^4} + \dots$

Отв. $-6 \leq x \leq 6$.

9. $\frac{x}{1 \cdot 4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4^3} + \frac{x^3}{5 \cdot 4^5} + \frac{x^4}{7 \cdot 4^7} + \dots$

Отв. $-16 \leq x \leq 16$.

§ 5. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА

Рассмотрим разложение функции $f(x)$ в степенной ряд, суммой которого является сама функция. Задача будет решена, если найдены числовые коэффициенты $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ соответствующего степенного ряда.

1. Формула Тейлора для многочлена. Пусть дан многочлен

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (16.9)$$

и требуется представить его в виде

$$f(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \dots + c_n(x-x_0)^n, \quad (16.10)$$

где x_0 — некоторое заданное число.

Коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ можно найти приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x в равенствах (16.9) и (16.10). Однако тогда пришлось бы решать систему $n+1$ уравнений. Во

Вычислим частные значения производных в точке $x=1$:

$$f(1)=2; \quad f'(1)=-2; \quad f''(1)=2; \quad f'''(1)=12.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2 + \frac{-2}{1}(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 = \\ &= 2 - 2(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^3. \end{aligned}$$

Приближенное значение функции в точке $x=1,02$ равно

$$f(1,02) = 2 - 2 \cdot 0,02 + 0,02^2 + 2 \cdot 0,02^3 = 2 - 0,04 = 1,96$$

(так как третье и четвертое слагаемые в отдельности и в сумме меньше 0,001, то их отбрасываем).

Приближенное значение функции в точке $x=0,997$ равно

$$f(0,997) = 2 - 2 \cdot (-0,003) + 0,003^2 + 2 \cdot (-0,003)^3 = 2 + 2 \cdot 0,003 = 2,006.$$

2. Формула Тейлора для произвольной функции. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, имеющую производные до $(n+1)$ -го порядка включительно. Формула Тейлора, записанная в виде (16.12), справедлива только для многочленов. Применяя ее для произвольной функции, допускаем погрешность, которую обозначим через $R_n(x)$. Тогда получим

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x). \end{aligned} \quad (16.13)$$

Формула (16.13) называется *формулой Тейлора для произвольной функции*, а $R_n(x)$ — *остаточным членом формулы Тейлора*.

Представим $R_n(x)$ в виде, сходном с остальными слагаемыми:

$$R_n(x) = \frac{D_n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \quad (16.14)$$

и найдем D_n .

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\begin{aligned} F(t) &= f(x) - f(t) - f'(t)(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f'''(t)}{3!}(x-t)^3 - \dots - \\ &\quad - \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{D_n}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \end{aligned}$$

Функцию $F(t)$ составляем так: все члены формулы (16.13) переносим в левую часть, вместо $R_n(x)$ подставляем выражение (16.14) и x_0 заменяем на t . Функция $F(t)$ имеет производную и при $t=x_0$ и $t=x$ обращается в нуль. Значит, $F(t)$ является непрерывной и дифференцируемой функцией в промежутке от $t=x_0$ до $t=x$ и на концах этого промежутка принимает равные значения (нуль). Согласно теореме Ролля, в этом промежутке имеется точка $t=\xi$,

в которой производная $F'(t)$ равна нулю. Вычислим эту производную:

$$F'(t) = -f'(t) - f''(t)(x-t) + f'(t) - \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 + f''(t)(x-t) - \\ - \frac{f^{IV}(t)}{3!}(x-t)^3 + \frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - \dots - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \\ + \frac{f^{(n-1)}(t)}{(n-2)!}(x-t)^{n-2} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{D_n}{n!}(x-t)^n.$$

Все члены, кроме двух, взаимно уничтожаются, следовательно, имеем

$$F'(t) = \frac{1}{n!} [D_n - f^{(n+1)}(t)] (x-t)^n.$$

Так как $F'(\xi) = 0$, (ξ — промежуточная точка между x_0 и x), то должно выполняться равенство

$$D_n - f^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

или

$$D_n = f^{(n+1)}(\xi).$$

Подставляя найденное значение D_n в уравнение (16.14), получим формулу Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}, \quad (16.15)$$

где

$$\xi = x_0 + \theta(x-x_0) \quad (0 < \theta < 1). \quad (16.16)$$

Таким образом, для величины ξ известен промежуток, в котором она находится, но неизвестно ее значение. Поэтому $f^{(n+1)}(\xi)$ можно оценить, но невозможно точно вычислить.

При $x_0 = 0$ формула Тейлора (16.13) принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (16.17)$$

где, согласно соотношениям (16.15) и (16.16),

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \quad (16.18)$$

Формулу (16.17) называют *формулой Маклорена*.

§ 6. РЯДЫ ТЕЙЛОРА И МАКЛОРЕНА

Если функция имеет производные всех порядков, то можно написать для нее формулы Тейлора и Маклорена при любом значении n .

Предположим, что остаточный член с возрастанием n неограниченно уменьшается по абсолютной величине, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0. \quad (16.19)$$

Тогда, чем больше n в правых частях формул (16.13) и (16.17), тем меньше $R_n(x)$, и при $n \rightarrow \infty$ $R_n(x) = 0$. Таким образом, приходим к равенствам

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots; \quad (16.20)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots. \quad (16.21)$$

Ряды, находящиеся в правых частях равенств (16.20) и (16.21), соответственно называются *рядами Тейлора* и *Маклорена*.

Полученные разложения применяются для приближенного вычисления функций. В рядах берется конечное число членов. Для оценки допускаемой погрешности нужно произвести оценку абсолютной величины остаточного члена или оценку остатка ряда.

Упражнения

1. Разложить по степеням двучлена $x+2$ многочлен $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x + 3$.
 Отв. $f(x) = -11 + 17(x+2) - 9(x+2)^2 + 2(x+2)^3$.
2. Разложить по степеням двучлена $x-2$ многочлен $f(x) = 7x^4 + 5x^3 - 3x^2 + x + 4$.
 Отв. $f(x) = 7(x-2)^4 + 61(x-2)^3 + 195(x-2)^2 + 273(x-2) + 146$.
3. Разложить по степеням двучлена $x-2$ многочлен $f(x) = x^5 + 2x^2 - 4$.
 Отв. $f(x) = 36 + 88(x-2) + 82(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5$.

§ 7. ПРИЗНАК РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИИ В РЯД ТЕЙЛОРА

Функция, которая в некотором интервале может быть представлена в виде ряда Тейлора, называется *аналитической* в этом интервале.

Условия, при которых функция является аналитической, следующие:

- 1) функция должна иметь производные любых порядков в заданном интервале (что позволяет образовать ряд Тейлора);
- 2) остаточный член $R_n(x)$ должен стремиться к нулю для любой точки интервала при $n \rightarrow \infty$ (что гарантирует сходимость ряда Тейлора к рассматриваемой исходной функции).

Следует отметить, что каждая элементарная функция в области ее определения, за исключением, быть может, отдельных точек, является аналитической функцией.

§ 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

Смысл разложения элементарных функций в степенные ряды состоит в том, что возникает возможность представления сложных по структуре или производимым действиям функций в виде алгебраических многочленов.

1. Разложение в степенной ряд экспоненциальной функции $f(x) = e^x$. Напишем ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (16.22)$$

Производные функции $f(x) = e^x$:

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = \dots = e^x.$$

Найдем частные значения в точке $x=0$:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 1.$$

Следовательно,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (16.23)$$

Этот ряд называется *экспоненциальным рядом*.

Следует убедиться в том, что ряд сходится и действительно имеет своей суммой функцию, которая этот ряд порождает. В этом случае можно утверждать, что данный ряд является разложением данной функции. Необходимо показать, что для любого x остаточный член ряда стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так как в этом случае ряд сходится и имеет своей суммой функцию e^x .

Остаточный член ряда (16.23) имеет вид

$$R_n(x) = e^{\theta x} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В примере 1 § 3 было показано, что ряд, аналогичный ряду (16.23), сходится. Из сходимости ряда следует, что при $n \rightarrow \infty$ его общий член $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ стремится к нулю. Множитель $e^{\theta x}$ является величиной ограниченной, так как $e^{\theta x} < e^x$ при $x > 0$, а при $x < 0$, $e^{\theta x} < 1$. Следовательно, $R_n(x) \rightarrow 0$ для любого значения x , ряд (16.23) сходится при всех x и его сумма совпадает с функцией e^x .

В частности, при $x=1$ имеем

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \dots$$

По этой формуле можно вычислить число e с любой точностью. Для вычисления числа e возьмем n членов и произведем оценку погрешности.

Остаток ряда

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} r_n &< \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)} + \frac{1}{(n+1)!(n+1)^2} + \dots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Выражение в квадратных скобках является бесконечно убывающей геометрической прогрессией, сумма которой

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{n+1}{n}.$$

Поэтому

$$r_n < \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n!n}.$$

Пусть $n=7$, тогда имеем

$$e = 2 + 0,50000 + 0,16667 + 0,04167 + 0,00833 + 0,00139 + 0,00020 = 2,71826.$$

Оценим погрешность:

$$\Delta = r_7 < \frac{1}{7!7} < 0,00003.$$

Следовательно, последняя цифра может быть неверной. В действительности с точностью до 10^{-5} число $e = 2,71828$.

2. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Находим производные:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right), \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right), \\ f^{IV}(x) &= \sin x = \sin\left(x + 4\frac{\pi}{2}\right), \\ &\dots \dots \dots \\ f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned} \quad (16.24)$$

При $x=0$ имеем:

$$f(0) = 0; f'(0) = 1; f''(0) = 0; f'''(0) = -1; f^{IV}(0) = 0, \dots$$

Четные производные функции $f(x) = \sin x$ при $x=0$ равны нулю, а нечетные — поочередно равны 1 и -1 , причем знак производной можно определить по формуле

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n.$$

Подставляя значения производных в ряд Маклорена (16.22), имеем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (16.25)$$

Согласно формулам (16.18) и (16.24), остаточный член ряда (16.25) можно записать в виде

$$R_{2n+1}(x) = \sin\left[\theta x + (2n+2)\frac{\pi}{2}\right] \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Первый множитель является ограниченной функцией, второй $\left(\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right)$ стремится к нулю (как общий член сходящегося ряда).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ сходится, так как является частью ряда примера 1

§ 3 (можно доказать, что ряд, являющийся частью сходящегося ряда, также сходится).

Таким образом, $R_{2n+1}(x) \rightarrow 0$, поэтому ряд (16.25) сходится при всех x и имеет своей суммой $\sin x$.

Разложение функции $f(x) = \cos x$ можно получить, если почленно продифференцировать ряд (16.25):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (16.26)$$

Равенства (16.25) и (16.26) справедливы при $-\infty < x < +\infty$.

3. Разложение в степенной ряд функции $f(x) = (1+x)^m$. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^m$.

Найдем производные функции:

$$\begin{aligned} f'(x) &= m(1+x)^{m-1}; \\ f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2}; \\ f^{(n)}(x) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(1+x)^{m-n}; \dots \end{aligned}$$

Вычислим частные значения производных в точке $x=0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 1; \quad f'(0) = m; \quad f''(0) = m(m-1); \quad f'''(0) = m(m-1)(m-2); \dots; \\ f^{(n)}(0) &= m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1); \dots \end{aligned}$$

В результате подстановки этих значений в ряд Маклорена (16.22) имеем

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \\ &+ \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots \end{aligned} \quad (16.27)$$

Этот ряд называется *биномиальным*. Найдем область сходимости степенного ряда (16.27) с помощью признака Даламбера. Здесь

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \right|, \\ |u_{n+1}| &= \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} \right|. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!} \times \right. \\ &\times \left. \frac{n!}{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \cdot x \right| = |x|. \end{aligned}$$

Итак, биномиальный ряд сходится при $|x| < 1$, при $|x| > 1$ — расходится. Сходимость биномиального ряда при $x = \pm 1$ требует

дополнительного исследования. Опуская доказательство, отметим, что при $m > 0$ и $x = \pm 1$ ряд (16.27) сходится абсолютно; при $-1 < m < 0$ и $x = 1$ сходится условно; при $m \leq -1$ и $x = 1$, а также при $m < 0$ и $x = -1$ ряд расходится.

Если m — целое положительное число, то ряд (16.27) превращается в конечную сумму, и получаем бином Ньютона.

4. Разложение в степенной ряд логарифмической функции $f(x) = \ln(1+x)$. Положим в биномиальном ряде $m = -1$. Тогда ряд

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + (-1)^n x^n + \dots \quad (16.28)$$

сходится при $|x| < 1$. Интегрируя почленно ряд (16.28), получаем ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (16.29)$$

который сходится при $|x| < 1$. При $x = 1$ получаем сходящийся ряд, рассмотренный в примере 1 § 7, а при $x = -1$ — гармонический ряд.

Ряд (16.29) называется *логарифмическим рядом*. В частном случае, при $x = 1$ имеем

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

Для вычислений числовых значений натуральных логарифмов этот ряд не годится, так как сходится очень медленно и приходится брать большое число членов. Так, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,00001 требуется взять 100 000 членов.

5. Разложение в степенной ряд обратной тригонометрической функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Положим в разложении (16.28) x^2 вместо x . Тогда имеем

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots \quad (|x| < 1).$$

В результате почленного интегрирования этого ряда получим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (|x| < 1). \quad (16.30)$$

При $x = \pm 1$ получаем сходящиеся знакочередующиеся ряды. В частном случае, при $x = 1$ имеем

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Для вычисления числа π этот ряд практически не пригоден, так как сходится очень медленно.

Упражнения

1. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Отв. $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} - \dots$ ($-1 \leq x < 1$).

2. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Отв. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$ ($-1 \leq x < 1$).

3. Разложить в степенной ряд функцию $f(x) = a^x$ при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Отв. $a^x = 1 + \frac{\ln a}{1!} x + \frac{\ln^2 a}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 a}{3!} x^3 + \dots + \frac{\ln^n a}{n!} x^n + \dots$.

Разложить, ограничиваясь тремя начальными членами разложения, в ряд Маклорена следующие функции:

4. $f(x) = e^x \ln(1+x)$.

Отв. $e^x \ln(1+x) = x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + \dots$ ($|x| < 1$).

5. $f(x) = e^{-x} \sin x$.

Отв. $e^{-x} \sin x = 1 - x + \frac{1}{2} x^2 + \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

6. $f(x) = \sin^2 x$.

Отв. $\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 - \dots$ ($-\infty < x < \infty$).

§ 9. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

1. Вычисление значений тригонометрических функций. С помощью степенных рядов можно приближенно вычислять значения функций $\sin x$ и $\cos x$. Чем больше абсолютное значение x , тем больше членов в разложении функции необходимо взять, чтобы получить значения $\sin x$ или $\cos x$ с заданной точностью. При малых значениях x можно считать $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$. При больших значениях x имеем

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \quad (16.31)$$

или

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \quad (16.31')$$

Чтобы решить, какой из формул следует воспользоваться, надо оценить остаток ряда. Так как ряды $\sin x$ и $\cos x$ закономерно чередуются, то остаток ряда по абсолютной величине не превосходит первого отброшенного члена. Поэтому отбрасывают все члены, начиная с того, который по абсолютной величине меньше заданной погрешности вычисления.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,00001 значение $\sin 10^\circ$.

Решение. Переводя градусы в радианы и учитывая заданную точность, будем проводить вычисления с шестью знаками. Углу 10°

соответствует угол $\frac{\pi}{18} = 0,174533$ радиан. Тогда имеем

$$\sin 10^\circ = \sin 0,174533 = 0,174533 - \frac{0,174533^3}{6} + \frac{0,174533^5}{120} = \\ = 0,174533 - 0,000886 = 0,173647 = 0,17365.$$

Первый отброшенный член $\frac{0,174533^5}{5!}$, следовательно, сумма всех отброшенных членов меньше 10^{-5} .

Пример 2. Вычислить $\cos 15^\circ$ с точностью до 0,00001.

Решение. Углу 15° соответствует угол $\frac{\pi}{12} = 0,261799$ радиан. Тогда имеем

$$\cos 15^\circ = 1 - \frac{0,261799^2}{2} + \frac{0,261799^4}{24} = 1 - 0,034270 + 0,000195 = \\ = 0,965925 \approx 0,96592.$$

Погрешность

$$\Delta < \frac{0,261799^6}{6!} < \frac{0,3^6}{720} \approx 10^{-6},$$

т. е. меньше 0,00001.

По формулам (16.31) можно вычислить с точностью до 0,00001 синусы и косинусы углов до 20° . Если необходимо вычислить углы от 20° до 45° , то для достижения указанной точности надо взять еще один-два члена разложения.

Формулы приведения дают возможность вычисление тригонометрических функций любых углов свести к вычислению тригонометрических функций углов, меньших 45° . Так, например, чтобы вычислить $\sin 63^\circ$, вычисляют $\cos 27^\circ$. С помощью степенных рядов и формул приведения составляются таблицы значений тригонометрических функций.

2. Приближенное вычисление логарифмов. Преобразуем ряд (16.29), заменяя x на $-x$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots \quad (|x| < 1).$$

Вычитая полученный ряд из ряда (16.29), имеем

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots \right) \quad (|x| < 1). \quad (16.32)$$

С помощью разложения (16.32) можно получить ряд для приближенного вычисления разности логарифмов двух целых положительных чисел. Обозначим через n целое положительное число и положим

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln(n+1) - \ln n, \quad (16.33)$$

или

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln \frac{n+1}{n}. \quad (16.33')$$

Отсюда

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}.$$

Разрешим это равенство относительно x :

$$x = \frac{1}{2n+1}. \quad (16.34)$$

Заметим, что при любом n , начиная с 1, величина x в равенстве (16.34) меньше 1. Поэтому ряд (16.32) при этих значениях x сходится. Подставляя выражения (16.33) и (16.34) в ряд (16.32), имеем

$$\ln(n+1) - \ln n = 2 \left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right],$$

или

$$\ln(n+1) = \ln n + \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots \right]. \quad (16.35)$$

Полагая в равенстве (16.35) $n=1$, имеем

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \frac{1}{9 \cdot 9^4} + \dots \right) = \frac{2}{3} (1 + 0,037037 + 0,002469 + 0,000196 + 0,000015) = 0,693144.$$

Зная $\ln 2$ и полагая в равенстве (16.35) $n=2$, получим

$$\begin{aligned} \ln 3 &= \ln 2 + \frac{2}{5} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 25} + \frac{1}{5 \cdot 25^2} + \dots \right) = 0,693144 + \\ &+ \frac{2}{5} (1 + 0,013333 + 0,000320) = 1,098605 \approx 1,09861. \end{aligned}$$

Последующие значения вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \ln 4 &= \ln 2^2 = 2 \ln 2; \\ \ln 6 &= \ln 2 \cdot 3 = \ln 2 + \ln 3; \\ \ln 8 &= \ln 2^3 = 3 \ln 2 \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Значения натуральных логарифмов нечетных чисел ($\ln 5$, $\ln 7$, $\ln 9$ и т. д.) находим с помощью равенства (16.35). Используя это равенство и свойства логарифмов четных чисел, можно вычислить логарифм любого числа.

3. Приближенное извлечение корней. Пусть требуется вычислить $\sqrt[k]{a}$ с большей точностью, чем это сделано в таблице логарифмов. Выберем число c таким, чтобы по абсолютной величине оно было по возможности ближе к $|a|$, т. е. величину

$$\alpha = |a - c^k| \quad (16.36)$$

подбираем по возможности меньшей. Из равенства (16.36) имеем

$$a - c^k = \pm \alpha \quad \text{или} \quad a = c^k \pm \alpha.$$

Итак,

$$\sqrt[k]{a} = \sqrt[k]{c^k \pm \alpha} = \sqrt[k]{c^k \left(1 \pm \frac{\alpha}{c^k} \right)} = c \left(1 \pm \frac{\alpha}{c^k} \right)^{1/k}.$$

Величина c выбирается так, чтобы $\left| \frac{\alpha}{c^k} \right|$ была меньше единицы. Поэтому выражение $\left(1 \pm \frac{\alpha}{c^k} \right)^{1/k}$ можно разложить в биномиальный ряд, оставляя в нем столько членов, сколько необходимо для получения требуемой точности вычисления.

Аналогично поступаем при вычислении значений $1/\sqrt[k]{a}$. При этом раскладывается в биномиальный ряд выражение $\left(1 \pm \frac{\alpha}{c^k} \right)^{-1/k}$.

Пример 1. Вычислить $\sqrt[3]{1,027}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1,027} &= (1 + 0,027)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3} \cdot 0,027 + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} 0,027^2 = \\ &= 1 + 0,009 - 0,00008 = 1,00892.\end{aligned}$$

Так как полученный ряд знакопеременный, то величина погрешности не превосходит величины первого отброшенного члена:

$$\Delta < \left| \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} \cdot 0,027^3 \right| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3!} \left(\frac{0,027}{3} \right)^3 < 10^{-6}.$$

Пример 2. Вычислить $\sqrt[5]{1000}$ с точностью до 0,00001.

Решение. Выберем c так, чтобы $\alpha = 1000 - c^5$ было по возможности меньше. Очевидно, что надо взять $c = 4$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{1000} &= \sqrt[5]{1024 - 24} = \sqrt[5]{4^5 \left(1 - \frac{24}{1024} \right)} = 4 \left(1 - \frac{3}{128} \right)^{\frac{1}{5}} = \\ &= 4 \left[1 + \frac{1}{5} \left(-\frac{3}{128} \right) + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right)}{2!} \left(-\frac{3}{128} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \left(\frac{1}{5} - 2 \right)}{3!} \left(-\frac{3}{128} \right)^3 + \dots \right] = \\ &= 4 \left[1 - \frac{3}{5 \cdot 128} - 2 \left(\frac{3}{5 \cdot 128} \right)^2 - 6 \left(\frac{3}{5 \cdot 128} \right)^3 - \dots \right] = \\ &= 4 (1 - 0,004688 - 0,000044 - 0,000001) = 3,98107.\end{aligned}$$

4. Приближенное вычисление значений функций при малых значениях аргумента. При малых значениях аргумента x можно пользоваться следующими приближенными формулами:

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{x}{n}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} = 1 - \frac{x}{n}.$$

Так, например, воспользовавшись этими формулами, имеем

$$\sqrt{1,0044} = 1,0022$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{0,9884}} = 1,0058.$$

При малых значениях x на основании разложения в степенной ряд функции e^x можно считать

$$e^x = 1 + x; \quad a^x = 1 + x \ln a.$$

Последнее равенство следует из того, что

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}.$$

Так, например,

$$e^{-0,008} = 0,992; \quad 7^{0,01} = 1 + 0,01 \ln 7 = 1 + 0,01 \cdot 1,9459 = 1,019459.$$

При малых значениях x можно считать

$$\ln(1+x) = x; \quad \ln(1-x) = -x.$$

Так, например,

$$\ln 1,023 = 0,023 \quad \text{или} \quad \ln 0,982 = -0,018.$$

Аналогично, при малых значениях x

$$\operatorname{arctg} x = x.$$

Так, например,

$$\operatorname{arctg} 0,02 = 0,02 \quad \text{или} \quad 1^\circ 9'.$$

5. Раскрытие неопределенностей. Рассмотрим на примере применение рядов для раскрытия неопределенностей.

Пример. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

Решение. Это неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим в ряд числитель, заменяя x на $2x$. Тогда искомый предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + 2x + \frac{4}{3}x^2 + \dots \right) = 2.$$

Упражнения

1. Вычислить $\sin 16^\circ$ с точностью до 0,01.

Отв. 0,28.

2. Вычислить $\cos 1^\circ$ с точностью до 0,000001.

Отв. 0,999848.

3. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\sqrt[3]{630}; \quad \sqrt[3]{1,015}; \quad \sqrt[4]{80}; \quad \sqrt[5]{30}.$$

Отв. 25,100; 1,005; 2,991; 1,975.

4. Вычислить с точностью до 0,001:

$$\ln 5; \ln 6; \ln 8; \ln 11.$$

Отв. 1,609; 1,792; 2,079; 2,398.

5. Найти приближенное значение $\ln 17$. У к а з а н и е. Учесть, что $\ln 16 = 4 \ln 2$.

Отв. 2,833.

1. Вычисление неопределенных интегралов. Степенные ряды в интервале их сходимости можно интегрировать. Для нахождения неопределенного интеграла подынтегральную функцию следует разложить в степенной ряд и почленно проинтегрировать. В результате интегрирования получается ряд, радиус сходимости которого такой же, как и у разложения подынтегральной функции.

Ряды используют также для нахождения неопределенных интегралов от функций, интегрируемых в конечном виде (если процесс интегрирования достаточно трудоемок).

Пример 1. Разложить в ряд интеграл $\int \frac{\cos x}{x} dx$.

Решение. Внося разложение функции $\cos x$ в ряд под знак интеграла и интегрируя его почленно, получим

$$\int \frac{1}{x} \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right] dx = \\ = \ln |x| - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^4}{4 \cdot 4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n(2n)!} + \dots + C.$$

Ряд сходится при всех x , кроме $x=0$, так как в этом случае подынтегральная функция $\frac{\cos x}{x}$ имеет разрыв.

Пример 2. Разложить в ряд интеграл $\int \sqrt[3]{1+x^5} dx$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в биномиальный ряд по степеням x^5 :

$$\sqrt[3]{1+x^5} = (1+x^5)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} x^5 + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} (x^5)^2 + \\ + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} (x^5)^3 + \dots + \\ + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right) \dots \left(\frac{1}{3} - n + 1 \right)}{n!} (x^5)^n + \dots = 1 + \frac{1}{3} x^5 - \\ - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} x^{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} x^{15} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3^n \cdot n!} x^{5n} + \dots, \\ (|x| < 1).$$

Интегрируем полученный ряд:

$$\int \sqrt[3]{1+x^5} dx = x + \frac{1}{3} \frac{x^6}{6} - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} \frac{x^{11}}{11} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} \frac{x^{16}}{16} + \\ + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-4)}{3^n \cdot n!} \frac{x^{5n+1}}{5n+1} + \dots + C \quad (|x| < 1).$$

2. Вычисление определенных интегралов. Если функция в конечном виде не интегрируется или ее интегрирование очень трудоемко,

то определенный интеграл от такой функции вычисляется с помощью рядов. В этом случае сначала выражают первообразную функцию в виде ряда, а затем по формуле Ньютона—Лейбница находят разность значений первообразной функции, вычисленных при верхнем и нижнем пределах интегрирования. Число членов полученного ряда определяется заданной точностью вычисления.

Пример 1. Вычислить с точностью до 0,000001 определенный интеграл $\int_0^{0,2} e^{-x^2} dx$.

Решение. Заменяем в экспоненциальном ряде независимую переменную x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots$$

Интегрируя почленно этот ряд, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{0,2} e^{-x^2} dx &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right) \Big|_0^{0,2} = 0,2 - \frac{0,008}{3} + \frac{0,00032}{10} = \\ &= 0,2 - 0,002667 + 0,000032 = 0,197365. \end{aligned}$$

Полученный ряд знакочередующийся, поэтому величина ошибки не превосходит величины первого отброшенного члена, т. е.

$$\Delta < \frac{x^7}{7 \cdot 3!} \Big|_0^{0,2} = \frac{0,2^7}{42} < 10^{-6}.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,00001 определенный интеграл $\int_0^{0,5} x^5 \sin x dx$.

Решение. Заменяя функцию $\sin x$ ее разложением в степенной ряд, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} x^5 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) dx &= \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9 \cdot 3!} + \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \frac{0,5^7}{7} - \frac{0,5^9}{54} = \\ &= 0,001116 - 0,000036 = 0,00108. \end{aligned}$$

Оценим погрешность:

$$\Delta < \frac{0,5^{11}}{11 \cdot 5!},$$

что значительно меньше 10^{-5} .

Для точного вычисления определенного интеграла надо его пять раз интегрировать по частям. Получить значение этого интеграла с заданной точностью можно легче при помощи рядов.

Упражнения

Разложить в ряд неопределенные интегралы:

1. $\int \sin x^2 dx.$

Омс. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3! 7} + \frac{x^{11}}{5! 11} - \frac{x^{15}}{7! 15} + \dots + C$

$(-\infty < x < +\infty).$

2. $\int \sqrt{x} e^x dx.$

Омс. $\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{2}{1! 5} x^{5/2} +$

$+\frac{2}{2! 7} x^{7/2} + \dots +$

$+\frac{2}{n! (2n+3)} x^{(2n+3)/2} + \dots + C$

$(0 \leq x < +\infty).$

3. $\int \sqrt{1-x^3} dx.$

Омс. $x - \frac{x^4}{1! 2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2! 2^2 \cdot 7} -$

$-\frac{1 \cdot 3 \cdot x^{10}}{3! 2^3 \cdot 10} - \dots + C \quad (-1 < x < 1).$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

Омс. $x + \frac{x^5}{2 \cdot 5} - \frac{3x^9}{8 \cdot 9} + \dots + C$

$(-1 < x < 1).$

Вычислить с точностью до 0,001 определенные интегралы:

5. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

Омс. 0,946.

6. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

Омс. 0,487.

7. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx.$

Омс. 0,764.

8. $\int_0^1 e^{-x^2} dx.$

Омс. 0,747.

9. $\int_0^{\frac{1}{5}} \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

Омс. 0,201.

10. $\int_0^{\frac{1}{4}} \ln(1 + \sqrt{x}) dx.$

Омс. 0,072.

11. $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x}}.$

Омс. 0,021.

12. $\int_0^{\frac{1}{2}} \cos \frac{x^2}{4} dx.$

Омс. 0,500.

13. $\int_0^1 \sin x^4 dx.$

Омс. 0,188.

14. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^2} dx.$

Омс. 32,864.

15. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

Омс. 0,119.

16. $\int_0^{10} \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

Омс. 0,098.

17. $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Омс. 0,333.

18. $\int_0^{\frac{1}{8}} \sqrt[3]{x} \cos^2 x dx.$

Омс. 0,047.

§ 11. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Для приближенного решения уравнения с помощью степенного ряда функции, входящие в это уравнение, разлагаются в ряд, а решение также ищется в виде степенного ряда, который при выполнении определенных условий сходится и представляет собой искомое решение уравнения.

Количество начальных членов определяется заданной точностью искомой функции, в зависимости от области изменения аргумента.

Применение рядов целесообразно при решении уравнений, которые точно не решаются или решаются сложно. Решение получается способом неопределенных коэффициентов или способом последовательного дифференцирования.

Пример 1. Найти три члена разложения решения алгебраического уравнения

$$y^3 + xy^2 + x^2y = 1. \quad (1)$$

Решение. а) Способ неопределенных коэффициентов. Ищем решение уравнения в виде степенного ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что при $x=0$ $y=1$. Поэтому в решении (2) полагаем $a_0=1$. Подставим решение в заданное уравнение:

$$(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^3 + x(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots)^2 + x^2(1 + a_1x + a_2x^2 + \dots) + \dots = 1.$$

Возведем ряды в соответствующие степени, отбрасывая члены, содержащие x в степени выше второй:

$$1 + 3a_1x + 3a_2x^2 + 3a_1^2x^2 + \dots + x + 2a_1x^2 + \dots + x^2 + \dots = 1.$$

Приравниваем коэффициенты при x и x^2 нулю. Отсюда

$$\left. \begin{aligned} 3a_1 + 1 &= 0, \\ 3a_2 + 3a_1^2 + 2a_1 + 1 &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение системы таково:

$$a_1 = -\frac{1}{3}; \quad a_2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 1 \right) = -\frac{2}{9}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (2), получаем

$$y = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9} + \dots \quad (3)$$

б) Способ последовательного дифференцирования. Будем искать решение y в виде ряда Маклорена:

$$y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}x + \frac{y''_0}{2!}x^2 + \dots, \quad (4)$$

где индекс 0 означает значение соответствующей величины при $x=0$. Согласно уравнению (1)

$$y_0 = 1.$$

Дифференцируем равенство (1) по x , учитывая, что y функция x :

$$3y^2y' + y^2 + 2xyy' + 2xy + x^2y' = 0,$$

откуда производная функции

$$y' = -\frac{y^2 + 2xy}{3y^2 + 2xy + x^2}. \quad (5)$$

Полагая $x=0$ и $y=1$, получаем $y'_0 = -1/3$.

Дифференцируя выражение (5), находим

$$y'' = -\frac{2(y y' + y + x y')(3y^2 + 2xy + x^2) - (y^2 + 2xy)(6yy' + 2y + 2xy' + 2x)}{(3y^2 + 2xy + x^2)^2}.$$

При $x=0$ $y=1$ и $y' = -1/3$ имеем

$$y''_0 = -\frac{2\left(-\frac{1}{3} + 1\right) \cdot 3 - (-2 + 2)}{9} = -\frac{4}{9}.$$

Подставляя это значение в решение (4), получим

$$y = 1 - \frac{x}{3} - \frac{2x^2}{9} + \dots$$

Пример 2. Найти четыре члена разложения трансцендентного уравнения $e^x - e^y = xy$.

Решение. Ищем решение уравнения в виде степенного ряда

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots, \quad (*)$$

ограничиваясь выписанными членами. Из заданного уравнения видно, что при $x=0$ $y=0$. Поэтому в ряде (*) полагаем $a_0=0$. Будем искать остальные, пока еще неизвестные коэффициенты a_1, a_2, a_3, a_4 . Используя экспоненциальный ряд, имеем

$$\left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right] - \left[1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots\right] = xy.$$

Подставляя в это выражение ряд (*), находим

$$\begin{aligned} x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots) - \\ - \frac{1}{2!} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)^2 - \\ - \frac{1}{3!} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)^3 - \\ - \frac{1}{4!} (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots)^4 = \\ = x(a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots). \end{aligned}$$

Раскрываем в левой части равенства скобки, ограничиваясь членами, содержащими x в степени не выше четвертой:

$$\begin{aligned} x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - (a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4) - \\ - \frac{1}{2!} (a_1^2x^2 + a_2^2x^4 + 2a_1a_2x^3 + 2a_1a_3x^4) - \\ - \frac{1}{3!} (a_1^3x^3 + 3a_1^2a_2x^4) - \frac{1}{4!} a_1^4x^4 = a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4. \end{aligned}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, тогда

при x имеем $1 - a_1 = 0;$

« x^2 « $\frac{1}{2} - a_2 - \frac{1}{2} a_1^2 = a_1;$

« x^3 « $\frac{1}{6} - a_3 - a_1a_2 - \frac{1}{6} a_1^3 = a_2;$

« x^4 « $\frac{1}{24} - a_4 - \frac{1}{2} a_1^2 - a_1a_3 - \frac{1}{2} a_1^2a_2 - \frac{1}{24} a_1^4 = a_3.$

Решая полученную систему, находим

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -4.$$

Подставляя эти значения в решение (*), окончательно получаем

$$y = x - x^2 + 2x^3 - 4x^4 + \dots$$

Упражнения

Доказать равенства, разложив левые части в ряды по степеням x :

1. $\sin(a+x) = \sin a \cos x + \cos a \sin x;$
2. $\cos(a+x) = \cos a \cos x - \sin a \sin x.$

ГЛАВА XVII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

§ 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое постоянное число $t \neq 0$, что от прибавления его к любому значению независимой переменной значение функции не меняется, т. е.

$$f(x+t) = f(x).$$

В общем случае

$$f(x+kt) = f(x)$$

при любом значении аргумента x и для произвольного целого числа k .

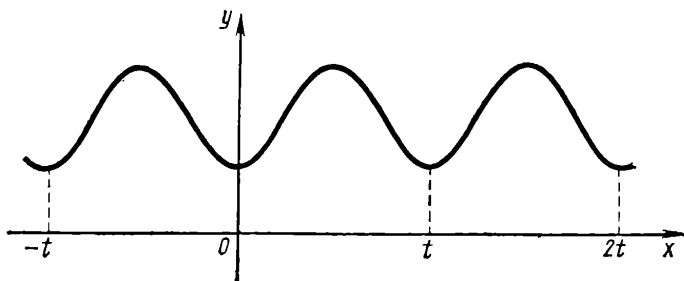


Рис. 17.1

Наименьшее положительное число t , от прибавления которого к любому значению независимой переменной значение функции не меняется, называется *периодом* функции. Примерами периодических функций могут служить, например, функции $y = \cos x$ (период 2π) или $y = \operatorname{tg} x$ (период π) и т. д.

В общем виде эти функции записываются так: $y = \cos(x \pm 2k\pi)$, $y = \operatorname{tg}(x \pm k\pi)$.

График периодической функции получается повторением части графика, соответствующего интервалу оси абсцисс, равному по длине периоду функции (рис. 17.1).

Характерной периодической функцией является *гармоника*, т. е. функция вида

$$f(x) = a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

где a , b , ω — коэффициенты.

График такой функции получается из графика синусоиды равномерным сжатием (или растяжением) в направлении осей координат.

Более сложной периодической функцией является тригонометрический многочлен n -го порядка

$$f(x) = a_0 + (a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x) + \\ + (a_2 \cos 2\omega x + b_2 \sin 2\omega x) + \dots + (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x), \quad (17.1)$$

где a_i, b_i — коэффициенты ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Величина $t = \frac{2\pi}{\omega}$ называется *периодом* многочлена, т. е.

$$f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right).$$

При $\omega = 1$ получаем тригонометрический многочлен с периодом 2π :

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \quad (17.2)$$

Тригонометрический многочлен, у которого число $2l$ является периодом, получается заменой в равенстве $t = \frac{2\pi}{\omega}$ величины t на величину $2l$, тогда $\omega = \frac{\pi}{l}$. В результате подстановки этого значения ω в уравнение (17.1) имеем

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (17.3)$$

Функция (17.3) представляет собой тригонометрический многочлен n -го порядка с периодом $2l$. В соответствии с этим бесконечный ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (17.4)$$

в случае его сходимости, есть периодическая функция, период которой 2π , а бесконечный ряд

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (17.5)$$

есть периодическая функция с периодом $2l$. На рис. 17.2 показаны графики тригонометрических многочленов, которые по своей форме мало напоминают синусоиду.

До сих пор ставилась задача представить данную функцию в виде степенного ряда. Эта задача является простейшим случаем более общей задачи представления функции в виде бесконечного ряда, членами которого являются функции заданного типа. При представлении функции в виде степенного ряда членами ряда являются степени аргумента с соответствующими коэффициентами. Другим видом разложения функции в ряд (особенно важным для технических приложений) является разложение по тригонометрическим функциям дуг синуса и косинуса, кратных аргументу. Ряд вида (17.1) назы-

вается *тригонометрическим рядом*. Задача представления заданной функции в виде тригонометрического ряда сводится к нахождению значений коэффициентов a_n, b_n ряда (17.1), при которых этот ряд представляет заданную функцию. Сумма ряда (17.1) в случае его сходимости является периодической функцией аргумента x с периодом 2π (так как все его члены периодические функции периода 2π). Поэтому если заданная функция неперiodическая или имеет период, отличный от 2π , то ряд (17.1) является разложением этой функции лишь в интервале длины 2π , например в интервале $(-\pi, +\pi)$.

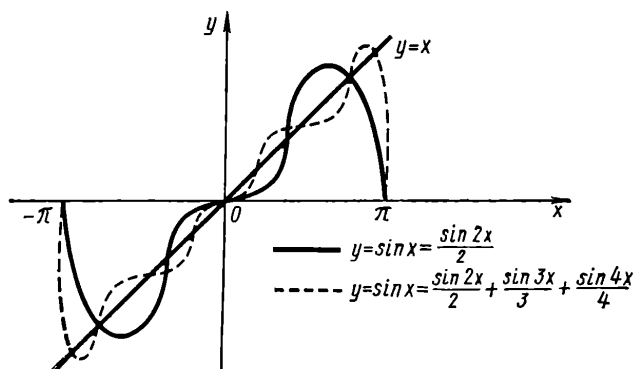


Рис. 17.2

§ 2. КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ДАННОЙ ФУНКЦИИ. РЯД ФУРЬЕ

Предположим, что функцию $f(x)$, период которой 2π , можно разложить в тригонометрический ряд с таким же периодом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (17.6)$$

(свободный член ряда записан в виде $\frac{a_0}{2}$ для единообразия получающихся в дальнейшем формул). Поставим задачу вычислить коэффициенты a_0, a_k, b_k ($k=1, 2, \dots, n$), зная функцию $f(x)$. Будем искать разложение функции в интервале $[-\pi, \pi]$. Умножим обе части равенства (17.6) на dx и почленно проинтегрируем в пределах от $-\pi$ до π :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx \right).$$

Рассмотрим интегралы, стоящие под знаком суммы. При любом $n \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx &= \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0; \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx &= \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{a_0}{2} x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{a_0}{2} (\pi + \pi) = a_0 \pi. \quad (17.7)$$

Умножим обе части равенства (17.6) на $\cos nx dx$ и почленно проинтегрируем в прежних пределах:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + \right. \\ &\quad \left. + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим интегралы, находящиеся в правой части равенства. Напомним известные тригонометрические формулы:

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)],$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)].$$

Учитывая эти формулы, для любых целых n и m ($n \neq m$) имеем:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n+m)x + \cos (n-m)x] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (n-m)x - \cos (n+m)x] dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin (n+m)x + \sin (n-m)x] dx = 0.$$

Все интегралы, находящиеся в правой части равенств, кроме одного, равны нулю. Этот единственный, не равный нулю интеграл и есть коэффициент при a_n . Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos nx dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \\ &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = a_n \pi. \end{aligned}$$

Таким образом, равенство принимает вид

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n \pi. \quad (17.8)$$

Аналогично, умножая обе части равенства (17.6) на $\sin nx dx$, найдем

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = b_n \pi. \quad (17.9)$$

Из соотношений (17.7), (17.8) и (17.9) получаем *формулы Эйлера—Фурье*:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

Придавая в этих равенствах индексу k последовательно значения 1, 2, 3, ..., получим значения коэффициентов $a_1, a_2, a_3, \dots$ и $b_1, b_2, b_3, \dots$.

По формулам (17.10) находятся коэффициенты разложения заданной периодической функции $f(x)$ в тригонометрический ряд. Эти коэффициенты называются *коэффициентами Фурье* для функции $f(x)$.

Тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье, называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

При выводе формул (17.10) почленно интегрировались ряд (17.6) и ряды, получающиеся в результате умножения его на $\cos nx$ и $\sin nx$. Правомерность этих действий не была показана и пока не доказано, что заданная функция $f(x)$, период которой 2π , может быть разложена в тригонометрический ряд с тем же периодом. Поэтому нельзя утверждать, что ряд Фурье для функции $f(x)$ будет сходиться к $f(x)$, т. е. что функция $f(x)$ является суммой своего ряда Фурье.

Вместо знака равенства между функцией $f(x)$ и ее рядом Фурье принято писать знак соответствия ($\sim$), если заранее неизвестно, что $f(x)$ есть сумма своего ряда Фурье. Например,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Заметим, что подынтегральные функции в формулах (17.10) являются периодическими функциями с периодом 2π . В связи с этим отметим важное свойство периодических функций: *интеграл от периодической функции $f(x)$, распространенный на отрезок, длина которого равна периоду t , имеет одно и то же значение:*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+t} f(x) dx = \int_{\beta}^{\beta+t} f(x) dx$$

при любых α и β .

Доказательство. Так как $f(x+t)=f(x)$, то с помощью подстановки $x+t=\tau$ приходим к равенству:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x+t) dx = \int_{\alpha+t}^{\beta+t} f(\tau) d\tau.$$

Следовательно,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha+t}^{\beta+t} f(x) dx.$$

Прибавляя к обеим частям этого равенства $\int_{\beta}^{\alpha+t} f(x) dx$, имеем

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\alpha+t} f(x) dx = \int_{\beta}^{\alpha+t} f(x) dx + \int_{\alpha+t}^{\beta+t} f(x) dx,$$

или

$$\int_{\alpha}^{\alpha+t} f(x) dx = \int_{\beta}^{\beta+t} f(x) dx,$$

что и требовалось доказать.

Поэтому отрезок интегрирования $[-\pi, \pi]$ может быть заменен любым другим отрезком $[d, d+2\pi]$ длины 2π и формулы Эйлера—Фурье принимают вид

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2\pi} f(x) dx; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2\pi} f(x) \cos kx dx; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_d^{d+2\pi} f(x) \sin kx dx \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

§ 3. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗЛОЖИМОСТИ ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ

Сформулируем условия, достаточные для разложения заданной функции в каком-либо интервале длины 2π в тригонометрический ряд.

Функцию $f(x)$ в каком-либо замкнутом интервале $[a, b]$ длины 2π можно представить в виде тригонометрического ряда, если:

1) во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$ заданная функция ограничена;

2) в замкнутом интервале $[a, b]$ заданная функция $f(x)$ изменяется монотонно или имеет конечное число максимумов и минимумов;

3) функция $f(x)$ непрерывна во всех точках замкнутого интервала $[a, b]$, кроме, может быть, конечного числа его точек.

Эти условия носят название *условий Дирихле*.

Если x_i — точка разрыва, то, в силу первого и второго условий, существуют пределы функций $f(x_i + \epsilon)$ и $f(x_i - \epsilon)$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Действительно, на основании второго условия, промежутки $[a, b]$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых функция $f(x)$ меняется монотонно. Точка x_i будет находиться в одном из таких интервалов или на его границе. В обоих случаях в замкнутых интервалах $[x_i - \epsilon, x_i]$ и $[x_i, x_i + \epsilon]$ функция $f(x)$ изменяется монотонно. На основании первого условия и теоремы о пределе монотонно изменяющейся величины (переменная величина a_n , принимающая ряд значений $a_1, a_2, a_3, \dots$ все время возрастает или, по крайней мере, не убывает и остается при этом меньше некоторого числа M , стремится к определенному пределу) существуют пределы

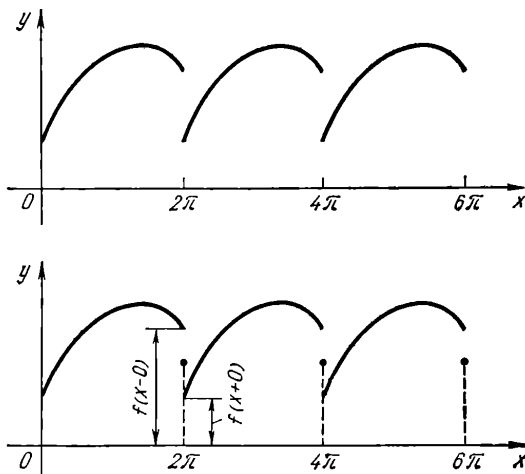


Рис. 17.3

все время возрастает или, по крайней мере, не убывает и остается при этом меньше некоторого числа M , стремится к определенному пределу) существуют пределы

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_i - \epsilon) \text{ и } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(x_i + \epsilon).$$

Обозначим их соответственно через $f(x_i - 0)$ и $f(x_i + 0)$. При выполнении условий Дирихле для заданной функции $f(x)$ существуют такие значения коэффициентов a_n и b_n тригонометрического ряда Фурье, при которых этот ряд сходится и его сумма в каждой точке замкнутого интервала $[a, b]$, где функция $f(x)$ непрерывна, совпадает со значением заданной функции $f(x)$ в этой точке. В каждой точке x_i разрыва функции $f(x)$ сумма этого ряда равна $\frac{f(x_i + 0) + f(x_i - 0)}{2}$, т. е. среднему арифметическому предельных значений справа и слева (рис. 17.3).

На концах замкнутого интервала $[a, b]$ сумма ряда Фурье равна $\frac{f(a) + f(b)}{2}$.

§ 4. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ НЕПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Пусть требуется разложить заданную непериодическую функцию $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[d, d + 2\pi]$ длины 2π . Для этого вычислим по формулам (17.11) значения коэффициентов

a_0 , a_k , b_k и запишем тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (17.12)$$

который является рядом Фурье для функции, служащей периодическим продолжением функции $f(x)$ вне отрезка $[d, d+2\pi]$.

Если на отрезке $[d, d+2\pi]$ функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то этим условиям удовлетворяет и периодическое продолжение и ряд (17.12) будет сходиться к $f(x)$ в каждой внутренней точке отрезка $[d, d+2\pi]$, в которой $f(x)$ непрерывна. На концах отрезка $[d, d+2\pi]$ ряд (17.12) сходится к значению $\frac{f(d+0) + f(d+2\pi-0)}{2}$.

В формулах (17.11) отрезок интегрирования есть $[d, d+2\pi]$. Поэтому значения, принимаемые функцией $f(x)$ вне отрезка $[d, d+2\pi]$, не оказывают влияния на величины коэффициентов a_0 , a_k , b_k . Следовательно, сказанное справедливо для функции $f(x)$, заданной на отрезке $[d, d+2\pi]$.

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 4 & \text{при } \pi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Решение. Эта функция имеет разрыв в точке $x=\pi$ и не имеет экстремумов, т. е. удовлетворяет условиям Дирихле. Здесь:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -2 dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 4 dx = -2 + 4 = 2;$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -2 \cos kx dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 4 \cos kx dx = \frac{-2 \sin kx}{\pi k} \Big|_0^{\pi} + \frac{4 \sin kx}{\pi k} \Big|_{\pi}^{2\pi} = 0$$

$$(\sin k\pi = 0 \text{ при } k = 0, 1, 2, 3, \dots);$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -2 \sin kx dx + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 4 \sin kx dx =$$

$$= \frac{2 \cos kx}{\pi k} \Big|_0^{\pi} - \frac{4 \cos kx}{\pi k} \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{2}{\pi k} (\cos k\pi - 1) - \frac{4}{\pi k} (1 - \cos k\pi) =$$

$$= \frac{6}{\pi k} (\cos k\pi - 1) = \frac{6}{\pi k} [(-1)^k - 1] = \begin{cases} -\frac{12}{\pi k} & \text{при } k = 1, 3, 5, 7, \dots, \\ 0 & \text{при } k = 2, 4, 6, 8, \dots \end{cases}$$

Подставляя значения a_0 , a_k , b_k в формулу (17.12), имеем

$$f(x) = 1 - \frac{12}{\pi} \sum_{k=1, 3, 5, 7 \dots}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} = 1 - \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)x}{2n-1} =$$

$$= \begin{cases} -2 & \text{при } 0 < x < \pi, \\ 4 & \text{при } \pi < x < 2\pi, \\ 1 & \text{при } x = 0; \pi; 2\pi. \end{cases}$$

График суммы этого ряда периодически повторяет график $f(x)$ (рис. 17.4).

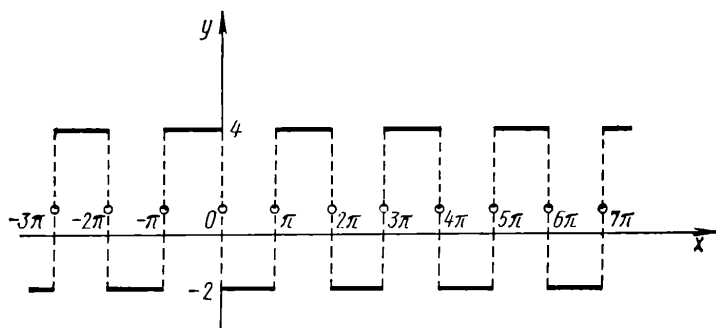


Рис. 17.4

§ 5. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим частные случаи разложения заданной периодической функции $f(x)$ в ряд Фурье.

1. Данная функция является *четной*, т. е. $f(-x) = f(x)$.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ есть функция четная, то ее ряд Фурье не содержит синусов.

Доказательство. Если $f(x)$ — четная функция, т. е. ее график симметричен относительно оси Oy , то $f(x) \cos kx$ также четная функция, что и требовалось доказать.

Если $f(x)$ есть четная функция в промежутке $(-a, a)$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Действительно,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

После замены в первом из определенных интегралов, находящихся в правой части равенства, x на $-x$, dx на $-dx$, a на $-a$, имеем

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Так как функция четная, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Поэтому для четной функции $f(x)$ имеем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx; \\ b_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.13)$$

Следовательно, для четной функции ряд Фурье содержит косинусы и свободный член, т. е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (17.14)$$

где коэффициенты a_0 и a_k ($k=1, 2, \dots$) определяются по формуле (17.13).

2. Данная функция является *нечетной*, т. е. $f(-x) = -f(x)$.

Теорема. Если периодическая функция $f(x)$ есть функция нечетная, то ее ряд Фурье не содержит косинусов.

Доказательство. Если $f(x)$ нечетная функция, то ее график симметричен относительно начала координат и функция $f(x) \sin kx$ также нечетная.

Если $f(x)$ — нечетная функция, то определенный интеграл

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Действительно,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Заменяя x на $-x$, dx на $-dx$, a на $-a$, получим

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(-x) dx = \int_0^a f(-x) dx,$$

откуда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a f(-x) dx + \int_0^a f(x) dx.$$

Так как заданная функция нечетная, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

Под знаком интеграла находится нечетная функция, поэтому имеем

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0.$$

Итак, для нечетной функции $f(x)$:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_k &= 0; \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.15)$$

Для нечетной функции ряд Фурье содержит синусы, т. е.

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad (17.16)$$

где коэффициенты b_k ($k = 1, 2, \dots$) определяются по формуле (17.15).

3. В общем случае, если функция $f(x)$ не является ни четной и ни нечетной, т. е.

$$f(-x) \neq -f(x) \text{ и } f(-x) \neq f(x),$$

то ее разложение в ряд Фурье содержит члены вида $a_n \cos nx$ и $b_n \sin nx$.

Если $f(x)$ — непериодическая функция, однако, на отрезке $[-\pi, \pi]$ является четной, то ее ряд Фурье на этом отрезке имеет вид (17.14). Аналогично, на отрезке $[-\pi, \pi]$ для нечетной функции справедливо выражение (17.16). Этим свойством можно воспользоваться для представления на отрезке $[0, \pi]$ произвольной функции $f(x)$ в виде ряда, содержащего только косинусы или только синусы. Действительно, чтобы представить на отрезке $[0, \pi]$ функцию в виде ряда, содержащего косинусы, можно взять четную функцию $F(x)$, равную $f(x)$ внутри отрезка $[0, \pi]$, и разложить ее на отрезке $[-\pi, \pi]$ в ряд Фурье. Тогда

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(x) \cos kx dx$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Внутри отрезка $[0, \pi]$ функция $F(x) = f(x)$, поэтому на этом отрезке

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx; \\ a_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ (k &= 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.17)$$

Аналогично, для нечетной функции $\Phi(x)$, равной $f(x)$ внутри отрезка $[0, \pi]$, получим, что на этом отрезке

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

где

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (17.18)$$

Пример 1. Разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x) = x^2$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$. График этой функции с периодическим продолжением изображен на рис. 17.5.

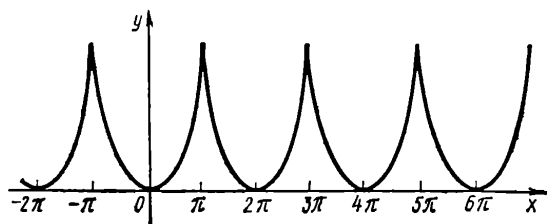


Рис. 17.5

Решение. Заданная функция — непрерывная. На отрезке $[-\pi, 0]$ функция $f(x)$ убывает, а на отрезке $[0, \pi]$ возрастает. Следовательно, на отрезке $[-\pi, \pi]$ условия Дирихле выполняются. Ряд Фурье

сходится к функции $f(x) = x^2$ всюду на отрезке $[-\pi, \pi]$ и к ее периодическому продолжению вне этого отрезка. Функция четная, поэтому

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}; \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx dx.$$

Интегрируя дважды по частям, получим

$$a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}, \quad b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Итак, на отрезке $-\pi \leq x \leq \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kx}{k^2},$$

или в развернутом виде

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right).$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2$, заданную на отрезке $[0, 2\pi]$. График функции и ее периодическое продолжение изображены на рис. 17.6.

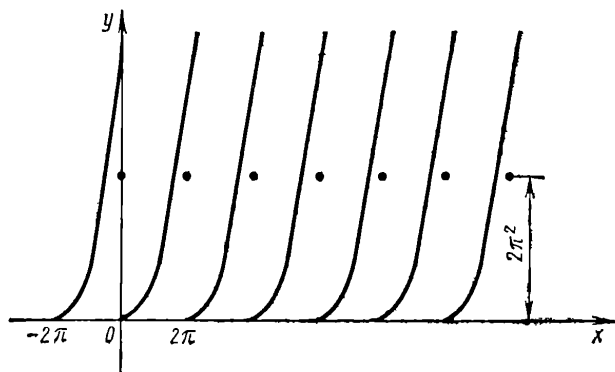


Рис. 17.6

Решение. Заданная функция возрастает на всем отрезке $[0, 2\pi]$, следовательно, на этом отрезке условия Дирихле выполняются. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[0, 2\pi]$, поэтому ряд Фурье для $f(x)$ будет сходиться к $f(x) = x^2$ во всех внутренних точках отрезка $[0, 2\pi]$ и к $\frac{f(0) + f(2\pi)}{2}$ на концах этого отрезка. Для вычисления коэффициентов разложения a_0 , a_k и b_k воспользуемся формулами (17.11), полагая $d=0$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{4\pi}{k^2};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin kx dx = -\frac{4\pi}{k}$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots).$$

Итак, на интервале $0 < x < 2\pi$

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{k^2} - \frac{\pi \sin kx}{k} \right).$$

При $x=0$ и $x=2\pi$ сумма этого ряда $\frac{f(0) + f(2\pi)}{2} = 2\pi^2$. Вне отрезка $[0, 2\pi]$ ряд сходится к периодическому продолжению функции

$f(x) = x^2$; внутри отрезка $[0, 2\pi]$ — к функции $f(x) = x^2$; на концах отрезка сумма ряда равна $2\pi^2$.

Пример 3. Разложить в ряде Фурье функцию, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$ с помощью равенств:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

График функции и ее периодическое продолжение изображены на рис. 17.7.

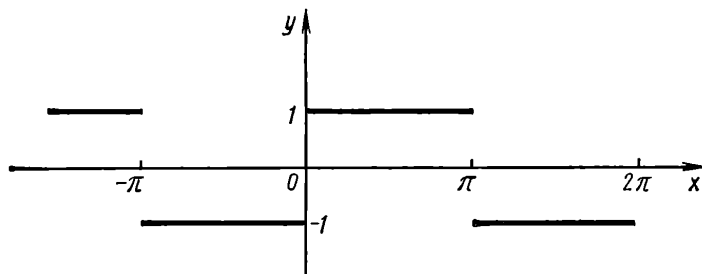


Рис. 17.7

Решение. Функция имеет разрыв в точке $x=0$; периодическое продолжение имеет разрывы в точках $x = \pm n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$). Следовательно, условия Дирихле выполняются и ряд Фурье сходится к $f(x)$ в интервалах $-\pi < x < 0$ и $0 < x < \pi$. Функция $f(x)$ нечетная, поэтому ряд Фурье будет содержать синусы ($a_0 = 0$ и $a_k = 0$ для всех k). Далее имеем

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ \frac{4}{\pi k} & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases}$$

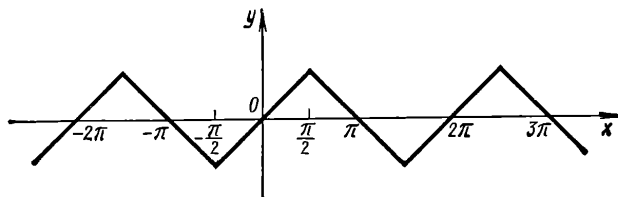


Рис. 17.8

Итак, в интервалах $-\pi < x < 0$ и $0 < x < \pi$ имеем

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \dots \right).$$

При $x=0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$ сумма ряда равна нулю.

Этот ряд сходится к периодическому продолжению функции $f(x)$, за исключением значений $x = n\pi$, где n — любое целое число.

Пример 4. Разложить в ряд Фурье нечетную функцию $f(x) = \arcsin(\sin x)$ (рис. 17.8).

Решение. Функция нечетная, поэтому $a_0 = 0$, $a_k = 0$. Так как

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{при } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin kx \, dx + \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos kx}{k} + \frac{\sin kx}{k^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{\pi} \left[-(\pi - x) \frac{\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2k} \cos \frac{k\pi}{2} + \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{4}{\pi k^2} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \text{ четном,} \\ \frac{4}{\pi k^2} (-1)^{\frac{k-1}{2}} & \text{при } k \text{ нечетном.} \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1, 3, 5, 7, \dots}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cdot \frac{1}{k^2},$$

$$\sin kx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Упражнения

Разложить в ряд Фурье следующие функции:

1. $f(x) = x^3$ в интервале $(-\pi, \pi)$.

Отв. $x^3 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx.$

2. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } -\pi < x < 0, \\ 3 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

Отв. $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right).$

3. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на отрезке } [-\pi, 0], \\ x & \text{на отрезке } [0, \pi]. \end{cases}$

Отв. $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right) + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi-2}{1} \sin x - \frac{\pi}{2} \sin 2x + \frac{\pi-2}{3} \sin 3x - \frac{\pi}{4} \sin 4x + \dots \right).$

$$4. f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$\text{Отв. } f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=2, 4, 6, 8, \dots}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2 - 1} = \begin{cases} \sin x & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 & \text{при } \pi \leq x \leq 2\pi. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } -\pi \leq x \leq 0; \\ bx & \text{при } 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$\text{Отв. } f(x) = \frac{b-a}{4} \pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=1, 3, 5, \dots}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2} + \\ + (a+b) \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin kx}{k} = \begin{cases} ax & \text{при } -\pi < x \leq 0, \\ bx & \text{при } 0 \leq x < \pi, \\ \frac{b-a}{2} \pi & \text{при } x = \pm \pi. \end{cases}$$

6. Разложить в ряд Фурье четную функцию $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

$$\text{Отв. } f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

7. Разложить в ряд Фурье функцию периода 2π , определенную равенством $f(x) = \frac{x^2}{4}$, при $-\pi < x \leq \pi$.

$$\text{Отв. } f(x) = \frac{\pi^2}{12} - \cos x + \frac{\cos 2x}{3} - \frac{\cos 3x}{9} + \dots + (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$$

§ 6. РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПЕРИОДОМ $2l$

Разложим в тригонометрический ряд функцию $F(x)$, удовлетворяющую условиям Дирихле и заданную на отрезке $[-l, l]$. Введем новую переменную t , полагая $x = \frac{lt}{\pi}$ или $t = \frac{\pi x}{l}$. При изменении x на отрезке $[d, d+2l]$ переменная t изменяется на отрезке $\left[\frac{\pi}{l}d, \frac{\pi}{l}d + 2\pi\right]$ длины 2π , и наоборот.

Следовательно,

$$F(x) = F\left(\frac{lt}{\pi}\right) \equiv \varphi(t),$$

так как $F\left(\frac{l}{\pi}t\right)$ есть некоторая функция $\varphi(t)$.

Разложим функцию $\varphi(t)$, заданную на отрезке $\left[\frac{\pi}{l}d, \frac{\pi}{l}d + 2\pi\right]$, в ряд Фурье:

$$\varphi(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (17.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{l} d}^{\frac{\pi}{l} d + 2\pi} \varphi(t) dt; \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{l} d}^{\frac{\pi}{l} d + 2\pi} \varphi(t) \cos kt dt; \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{l} d}^{\frac{\pi}{l} d + 2\pi} \varphi(t) \sin kt dt. \end{aligned} \right\} \quad (17.20)$$

Заменим переменную t на $x = \frac{l}{\pi} t$, откуда $dt = \frac{\pi}{l} dx$, $\varphi(t) = \varphi\left(\frac{\pi}{l} x\right) = F(x)$ и введем новые пределы интегрирования d и $d + 2l$. Тогда

$$F(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right), \quad (17.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_d^{d+2l} F(x) dx; \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_d^{d+2l} F(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx; \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_d^{d+2l} F(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.22)$$

Если в разложении (17.19) знак $\sim$ можно заменить знаком равенства, то это можно сделать и в разложении (17.21), и наоборот.

Ряд (17.21), в котором коэффициенты a_k и b_k вычислены по формулам (17.22), называют рядом Фурье для функции $F(x)$ на отрезке $[d, d + 2l]$.

Если функция $F(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке длины $[d, d + 2l]$, то функция $\varphi(t)$ удовлетворяет им на отрезке $\left[\frac{\pi}{l} d, \frac{\pi}{l} d + 2\pi\right]$.

Все сказанное для ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке длины 2π справедливо для ряда Фурье функции $F(x)$ на отрезке $[d, d + 2l]$ длины $2l$. Следовательно, если функция $F(x)$ удовлетворяет на

отрезке $[d, d + 2l]$ условиям Дирихле, то ее ряд Фурье сходится к $F(x)$ в каждой внутренней точке отрезка $[d, d + 2l]$, в котором функция $F(x)$ непрерывна. В тех внутренних точках отрезка $[d, d + 2l]$, в которых функция $F(x)$ претерпевает разрыв, ряд (17.21) сходится к полусумме предельных значений справа и слева. На концах отрезка $[d, d + 2l]$ ряд (17.21) сходится к $\frac{f(d+0) + f(d+2l-0)}{2}$.

Если функцию $F(x)$ требуется разложить в ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ или $[0, 2l]$, то при определении коэффициентов разложения в первом случае в формулах (17.22) вместо d следует писать $-l$, а во втором — нуль.

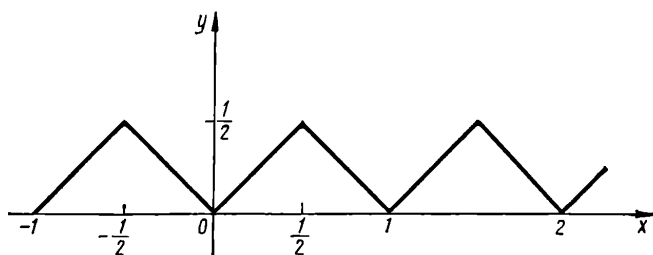


Рис. 17.9

Если разложение производится на отрезке $[-l, l]$, то в случае когда $F(x)$ — четная функция, имеем:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) dx; \\ a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx; \\ b_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17.23)$$

Если функция $F(x)$ — нечетная, то

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0; \\ a_k &= 0; \\ b_k &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \right\} \quad (17.24)$$

Полученными результатами можно воспользоваться при разложении функции $F(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, в ряд косинусов. В этом случае коэффициенты разложения вычисляются по формулам (17.23), а затем подставляют их значения в уравнение (17.21). Для того чтобы разложить функцию $F(x)$, заданную на отрезке $[0, l]$ в ряд синусов, нужно вычислить коэффициенты разложения по формулам (17.24) и подставить их значения в уравнение (17.21).

Пример 1. Разложить на отрезке $[-1/2, 1/2]$ четную функцию $f(x) = |x|$ в ряд Фурье. График функции $f(x)$ и его периодическое продолжение представлены на рис. 17.9.

Решение. Функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[-1/2, 1/2]$ условиям Дирихле. Периодическое продолжение функции $f(x)$ есть непрерывная функция. Ряд Фурье для $f(x)=|x|$ на отрезке $[-1/2, 1/2]$ будет сходиться к $|x|$ во всех точках отрезка.

Коэффициенты вычисляем по формулам (17.23):

$$a_0 = 4 \int_0^{1/2} x dx = 1/2; \quad a_k = \frac{2}{1/2} \int_0^{1/2} x \cos \frac{k\pi x}{1/2} dx; \quad b_k = 0.$$

Так как в нашем случае $l=1/2$ и $|x|=x$ в промежутке интегрирования на отрезке $[0, 1/2]$, то

$$a_k = 4 \int_0^{1/2} x \cos 2k\pi x dx.$$

Интегрируем по частям, полагая $x=u$, $\cos 2k\pi x dx = dv$:

$$a_k = \frac{2x \sin 2k\pi x}{k\pi} \Big|_0^{1/2} - \frac{2}{k\pi} \int_0^{1/2} \sin 2k\pi x dx,$$

откуда

$$a_k = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Подставляя значения a_0 , a_k , b_k и l в разложение (17.21), имеем

$$|x| = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos 2k\pi x,$$

или в развернутом виде (на отрезке $-1/2 \leq x \leq 1/2$)

$$|x| = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \left(\frac{\cos 2\pi x}{1} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \frac{\cos 10\pi x}{5^2} + \dots \right).$$

Вне отрезка $[-1/2, 1/2]$ ряд будет сходиться к периодическому продолжению функции $f(x)=|x|$ вне этого отрезка.

Пример 2. Разложить в ряд Фурье, содержащий только синусы, функцию $f(x)=x^2$, заданную на отрезке $[0, 1/2]$.

Решение. Продолжим нечетным образом заданную функцию на отрезок $[-1/2, 0]$, т. е. рассмотрим функцию

$$F(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } -1/2 < x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq 1/2. \end{cases}$$

График функции вместе с ее периодическим продолжением представлен на рис. 17.10.

Коэффициенты вычисляем по формулам (17.24) при $l=1/2$:

$$a_k = 0 \quad (k = 0, 1, \dots);$$

$$b_k = 4 \int_0^{1/2} x^2 \sin k\pi x dx \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Интегрируем последнее равенство по частям, полагая $x^2 = u$, $\sin 2k\pi x dx = dv$:

$$b_k = -\frac{2x^2 \cos 2k\pi x}{k\pi} \Big|_0^{1/2} + \frac{4}{k\pi} \int_0^{1/2} x \cos 2k\pi x dx;$$

аналогично примеру 1

$$4 \int_0^{1/2} x \cos 2k\pi x dx = \frac{(-1)^k - 1}{k^2 \pi^2},$$

откуда

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^3} - \frac{(-1)^k}{2k} \right] \quad (k = 1, 2, \dots).$$

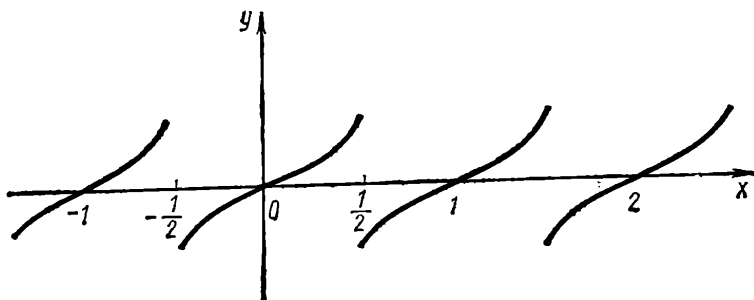


Рис. 17.10

Итак, искомое разложение

$$x^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{\pi^2 k^3} - \frac{(-1)^k}{2k} \right] \sin 2k\pi x \quad (0 \leq x \leq 1/2).$$

§ 7. ПРАКТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Гармоническим анализом называется процесс разложения функций в ряды Фурье, который сводится к вычислению коэффициентов Фурье a_n , a_k , b_k , выражаемых с помощью определенных интегралов.

На практике функция $f(x)$ часто задается с помощью таблицы или в виде графика. В этих случаях коэффициенты Фурье можно вычислить только приближенно с помощью приближенных методов интегрирования, например, используя формулу прямоугольников. Приближенное вычисление коэффициентов Фурье называется *практическим гармоническим анализом*. Для приближенного вычисления коэффициентов Фурье промежуток $[d, d+2\pi]$ разбивается на n равных частей точками $x_0 = d$, $x_1 = d+h$, $x_2 = d+2h$, $x_3 = d+3h$, ..., $x_n = d+nh = d+2\pi$. Шаг деления $h = \frac{2\pi}{n}$. Значения функции $f(x)$

в точках x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , ..., x_n обозначим соответственно через y_0 , y_1 , y_2 , y_3 , ..., y_n . Если функция задана с помощью таблицы или в виде

графика, то эти значения берутся из таблицы или с графика путем измерения соответствующих ординат.

Окончательно имеем

$$a_0 \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i, \quad a_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos kx_i, \quad b_k \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin kx_i.$$

Упражнения

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = x^2/2$, заданную на отрезке $[-3; 3]$.

Отв. $f(x) = \frac{3}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{3} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{3} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{3} - \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi x}{3} + \dots \right).$

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = e^{-x}$, заданную на отрезке $[0; 2]$.

Отв. $f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{при } 0 < x < 2, \\ \frac{1+e^{-2}}{2} & \text{при } x=0 \text{ и } x=2. \end{cases}$

3. Разложить в ряд Фурье (по синусам) функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2-x & \text{при } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Отв. $f(x) = \frac{8}{\pi^2} \left(\sin \frac{\pi x}{2} - \frac{1}{9} \sin \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{25} \sin \frac{5\pi x}{2} - \frac{1}{49} \sin \frac{7\pi x}{2} + \dots \right).$

4. Разложить в ряд Фурье (по косинусам) функцию

$$f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{l} & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{l}{2} < x < l. \end{cases}$$

Отв. $f(x) = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi x}{l} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \cos \frac{2\pi n x}{l}.$

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. ФУНКЦИИ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ, СИМВОЛИКА. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Функции, зависящие от двух и большего числа переменных, называются *функциями многих переменных*.

Пусть несколько переменных величин $u, x, y, z, \dots$ меняются так, что каждой системе значений переменных $x, y, z, \dots$ соответствует одно или несколько значений u . Тогда u является функцией переменных $x, y, z, \dots$. Символически это записывается

$$u = f(x, y, z, \dots), \quad (18.1)$$

где f — символ функциональной зависимости переменных.

Функция u может быть однозначной или многозначной в зависимости от того, сколько ее значений соответствует каждой системе значений независимых переменных $x, y, z, \dots$. Например, функция $u = 2x + y + 3z$ — однозначная, а функция $u = \pm \sqrt{2x + y + 3z}$ — многозначная (двузначная).

Функции многих переменных могут быть заданы в явном и неявном виде. Функция, заданная в *явном* виде, записывается в виде (18.1).

Если функциональная зависимость переменных $x, y, z, \dots$ и u задана с помощью уравнения

$$F(x, y, z, \dots, u) = 0,$$

то одна из переменных, например u , называется *неявной* функцией переменных $x, y, z, \dots$. Так, например, функция $z = \frac{x^2 + y^2}{2}$ задана в явном виде, а функция $e^y + x^2 e^{-y} - 4x = 0$ — в неявном. Переменные, от которых зависит функция, могут быть независимыми или в свою очередь являться функциями. В первом случае имеем функцию независимых переменных, во втором — *сложную* функцию, т. е. функцию от функций.

Функция $\Phi(u, v, w, \dots)$, зависящая от нескольких аргументов $u, v, w, \dots$, каждый из которых в свою очередь является функцией независимых переменных $x, y, z, \dots$, т. е. $u = u(x, y, z, \dots)$, $v = v(x, y, z, \dots)$, $w = w(x, y, z, \dots)$, ..., называется *сложной*.

Наиболее часто приходится иметь дело с функцией двух переменных. *Областью определения* D функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется совокупность всех значений, которые могут принимать

независимые переменные. Точка $(x; y)$ при изменении координат x, y перемещается в этой области. В общем случае область определения функции $z = f(x, y)$ может быть самой разнообразной: круг, квадрат, прямоугольник, треугольник, полуплоскость, квадрант и т. д. В дальнейшем рассматриваются функции, областью определения которых является часть плоскости, ограниченная одной или несколькими непрерывными кривыми. Кривые, ограничивающие область, называются *границами области*.

Частным значением функции $z = f(x, y)$ называется ее значение, соответствующее какой-либо определенной паре значений аргументов. Так, если при $x = a, y = b$ функция принимает частное значение c , то $c = f(a, b)$.

Пример 1. Найти частное значение функции

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

в точке $A(2; -3)$.

Решение. Подставляя в выражение функции $x = 2, y = -3$, получаем

$$f(2; -3) = \frac{2 \cdot 2 \cdot (-3)}{2^2 + (-3)^2} = -\frac{12}{13}.$$

Пример 2. Найти область определения функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

Решение. Квадратный корень определен в случае, если подкоренное выражение является неотрицательным. Поэтому функция z определена при тех действительных значениях переменных x и y , для которых одновременно выполняются следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &\geq 0, \\ 9 - x^2 - y^2 &\geq 0. \end{aligned} \right\}$$

Эту систему неравенств можно преобразовать к виду

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 1, \\ x^2 + y^2 &\leq 9. \end{aligned} \right\}$$

Итак, областью определения является кольцо (рис. 18.1).

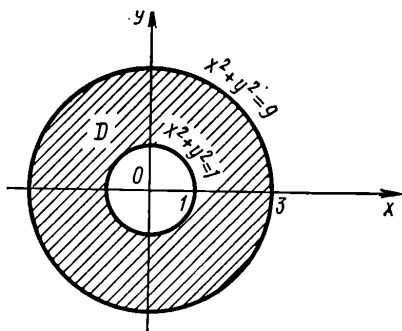


Рис. 18.1

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ. ЛИНИИ УРОВНЯ

Функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$ геометрически можно изобразить как аппликату точки, абсциссой и ординатой которой служат соответственно независимые переменные x и y . При

всевозможных изменениях x и y конец аппликаты (если функция непрерывная) описывает поверхность.

Пусть $A_1(x; y)$ — точка плоскости xOy , $A_1A = f(x, y)$ — соответствующая ей аппликата (рис. 18.2). Говорят, что $f(x, y)$ есть значение функции в точке $A_1(x; y)$ или в точке $(x; y)$.

Понятие точки, как совокупности значений независимых переменных, можно распространить и на большее число независимых переменных. Например, если дана функция

$$u = f(x, y, z),$$

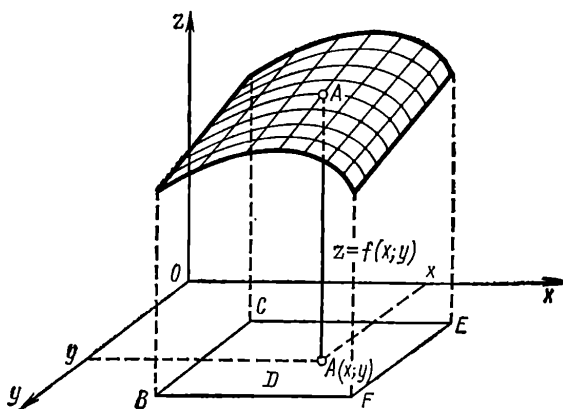


Рис. 18.2

то говорят, что u есть значение функции в точке $(x; y; z)$. Точку с координатами $(x; y; z)$ можно трактовать как точку пространства с координатами $(x; y; z)$ относительно данной пространственной системы координат.

Если число независимых переменных увеличивается, например, до четырех x, y, z, t , то геометрического толкования дать нельзя. Условились говорить, что точка с координатами $(x; y; z; t)$ есть точка четырехмерного пространства, подразумевая при этом не реальное представление, а всю совокупность четырех чисел (x, y, z, t) , состоящую из всевозможных значений независимых переменных x, y, z, t .

Пример 1. Построить график функции $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Решение. Возведем в квадрат обе части уравнения

$$x^2 + y^2 = z^2, \text{ или } x^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

В сечении данной поверхности плоскостями $x = 0$, $y = 0$ получается пара пересекающихся прямых — биссектрис координатных углов $z = \pm y$ и $z = \pm x$. В сечении поверхности плоскостью $z = 0$ получим точку $x^2 + y^2 = 0$, т. е. начало координат. В сечении поверхности плоскостями $z = \pm h$ получаются окружности $x^2 + y^2 = h^2$. Итак, однородное уравнение второго порядка геометрически представляет собой коническую поверхность с вершиной O в начале координат и осью Oz (рис. 18.3).

Во многих задачах удобно геометрически интерпретировать функции двух переменных, не применяя пространственную систему координат. Такое представление возможно с помощью *линий уровня*.

Отметим на плоскости xOy все точки $(x; y)$, в которых функция $z = f(x, y)$ принимает одно и то же значение, например значение, равное a . Другими словами, отмечаются те точки $(x; y)$, для которых $f(x, y) = a$. Совокупность этих точек образует на плоскости xOy некоторую кривую, которая называется *линией уровня* функции $z = f(x, y)$. Уравнение $f(x, y) = a$ является уравнением этой кривой. Придавая a различные значения и каждый раз строя кривую, уравнение которой $f(x, y) = a$, получим *семейство линий уровня*. Это семейство наглядно описывает функцию $z = f(x, y)$. На рисунках рядом с линией уровня ставят то значение a , которому она соответствует.

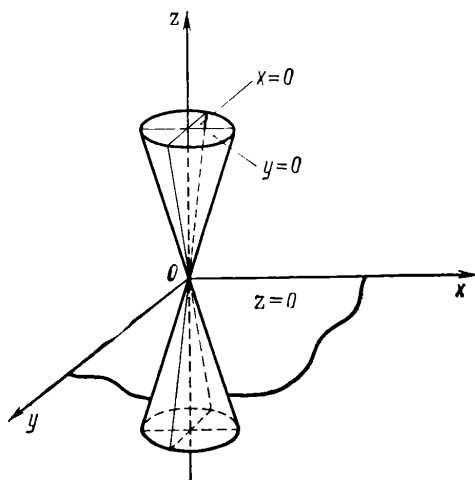


Рис. 18.3

Итак, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ уравнения линий уровня имеют вид

$$f(x, y) = a.$$

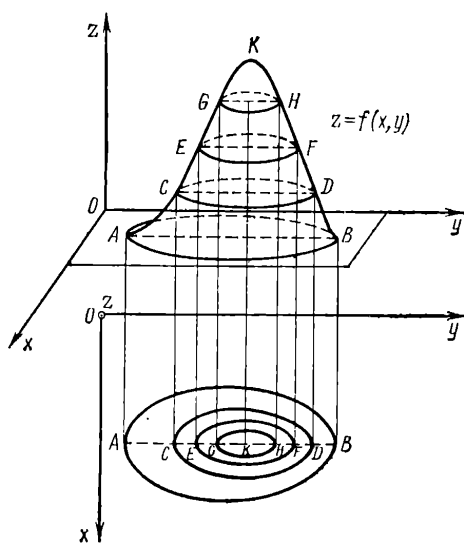


Рис. 18.4

Если значения z откладывать по оси Oz , то линии уровня на плоскости xOy представляют собой проекции на эту плоскость кривых, получаемых в пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $z = a$ (рис. 18.4). Зная линии уровня, легко исследовать характер поверхности $z = f(x, y)$.

Пример 2. Определить линии уровня функции $z = 1 - x^2 - y^2$.

Решение. Линиями уровня являются линии, уравнения которых $1 - x^2 - y^2 = a$. Это окружности $x^2 + y^2 = 1 - a$ с радиусом $r = \sqrt{1 - a}$.

Если принять $1 - a = r^2$, то $x^2 + y^2 = r^2$. В частности, при $a = 0$ $r = 1$ и уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 1$.

Упражнения

Найти область определения следующих функций:

1. $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

Отв. Кольцо $4 \leq x^2 + y^2 \leq 36$.

2. $z = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}} - 1$.

Отв. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \geq 1$.

3. $z = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$.

Отв. $x \geq 0$, $y > 0$ — I четверть плоскости xOy .

4. $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

Отв. Вся плоскость xOy , кроме прямых $y = \pm x$.

Построить графики следующих функций двух переменных:

5. $z = 1 - x - y$. 6. $x = 2$. 7. $x + y = 1$. 8. $z = x^2$. 9. $x^2 - 2x + y^2 = 0$.

10. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$.

Построить семейство линий уровня для следующих функций:

11. $z = x + y$. 12. $z = \frac{x^2 + y^2}{2x}$. 13. $z = \frac{x}{y^2}$. 14. $z = x^2 - y^2$. 15. $z = \ln(xy)$.

§ 3. ПОНЯТИЕ О ПРЕДЕЛЕ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Число M называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $P(x; y)$, отличных от точки P_0 , принадлежащих области определения функции и удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$, имеет место неравенство

$$|f(x, y) - M| < \varepsilon.$$

Пример 1. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{3x + 2y}{x^2 + y^2 + 2} = \frac{5}{4}.$$

Решение. Требуемое будет доказано, если для заданного положительного числа ε можно найти такое число $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы из неравенств

$$\left. \begin{aligned} 0 < |x - 1| < \delta, \\ 0 < |y - 1| < \delta \end{aligned} \right\}$$

следовало неравенство

$$\left| \frac{3x + 2y}{x^2 + y^2 + 2} - \frac{5}{4} \right| < \varepsilon.$$

Абсолютную величину разности можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left| \frac{3x+2y}{x^2+y^2+2} - \frac{5}{4} \right| &= \left| \frac{12x+8y-5x^2-5y^2-10}{4(x^2+y^2+2)} \right| < |12x+8y-5x^2-5y^2-10| = \\ &= |5x-5x^2+5y-5y^2+7x+3y-7-3| = |5x(1-x)+5y(1-y)+ \\ &\quad +7(x-1)+3(y-3)| = |(1-x)(5x-7)+(1-y)(5y-3)| \leq \\ &\leq |1-x||5x-7| + |1-y||5y-3|. \end{aligned}$$

Пусть $0 < |x-1| < \delta$, $0 < |y-1| < \delta$. Для простоты будем считать, что $0 < \delta < 1$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} 0 < |x-1| < 1, \\ 0 < |y-1| < 1, \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad \left. \begin{aligned} |x-1| < 1, \\ |y-1| < 1. \end{aligned} \right\}$$

Освобождаясь от знака абсолютной величины в неравенстве, содержащем x , получим два неравенства

$$x-1 < 1 \text{ и } x-1 > -1,$$

откуда находим $x < 2$ и $x > 0$, т.е. $0 < x < 2$. Аналогично получаем $0 < y < 2$.

Рассмотрим только те точки, которые принадлежат δ -окрестности точки с координатами $(1; 1)$:

$$|x-1| = |1-x| < \delta, \quad |y-1| = |1-y| < \delta.$$

Тогда имеем

$$\left| \frac{3x+2y}{x^2+y^2+2} - \frac{5}{4} \right| < |5x-7|\delta + |5y-3|\delta.$$

Оценивая сверху (при $x=2$, $y=2$) абсолютную величину разности, получим

$$\left| \frac{3x+2y}{x^2+y^2+2} - \frac{5}{4} \right| < |10-7|\delta + |10-3|\delta = 3\delta + 7\delta = 10\delta.$$

Так как $\varepsilon > 0$ задано, то достаточно выбрать такое число $\delta(\varepsilon) > 0$, чтобы $10\delta = \varepsilon$ или $\delta = \varepsilon/10$. Итак, для всех точек $P(x; y)$, принадлежащих δ -окрестности предельной точки $P_0(1; 1)$, имеет место неравенство

$$\left| \frac{3x+2y}{x^2+y^2+2} - \frac{5}{4} \right| < \varepsilon,$$

следовательно,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} \frac{3x+2y}{x^2+y^2+2} = \frac{5}{4}.$$

Пример 2. Вычислить предел

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2+(y-2)^2+1}-1}{x^2+(y-2)^2}.$$

Решение. Этот предел находится при условии, что $P(x; y)$ стремится к $P_0(0; 2)$. Расстояние между этими точками

$$d = \sqrt{x^2+(y-2)^2}.$$

На основании сказанного имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2}} \frac{\sqrt{x^2 + (y-2)^2 + 1} - 1}{x^2 + (y-2)^2} &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\sqrt{d^2 + 1} - 1}{d^2} = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \frac{(d^2 + 1) - 1}{d^2 (\sqrt{d^2 + 1} + 1)} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{d^2}{d^2 (\sqrt{d^2 + 1} + 1)} = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{d^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

§ 4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть независимые переменные $x, y, z, \dots$, изменяясь по любому закону, стремятся к определенным пределам

$$\lim x = a, \quad \lim y = b, \quad \lim z = c, \quad \dots,$$

т. е. точка $(x; y; z, \dots)$ стремится к точке $(a; b; c, \dots)$. Если при этом соответствующее значение функции также стремится к определенному пределу, равному значению этой функции при $x = a, y = b, z = c, \dots$, т. е.

$$\lim f(x, y, z, \dots) = f(\lim x, \lim y, \lim z, \dots), \quad (18.2)$$

то функция называется *непрерывной в точке* $(a; b; c; \dots)$.

Исходя из понятия предела, можно указать для изменения независимых переменных такую достаточно малую область точки $(a; b; c; \dots)$, чтобы внутри этой области переменное значение функции сколь угодно мало отличалось от своего предела:

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, \dots) - f(a, b, c, \dots)| &< \varepsilon; \\ |x - a| < \delta_1, \quad |y - b| < \delta_2, \quad |z - c| < \delta_3, \quad \dots \end{aligned} \quad (18.3)$$

Здесь ε — заданное наперед сколь угодно малое положительное число; $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots$ — достаточно малые положительные числа, определяющие область изменения независимых переменных.

Функция, непрерывная в каждой точке какой-либо области, называется *непрерывной в этой области*.

Функция двух независимых переменных $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(a; b)$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b),$$

каким бы образом x и y ни приближались к a и b .

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в области* D , если она непрерывна в каждой точке, принадлежащей этой области.

Геометрически непрерывная в области D функция двух независимых переменных представляет собой непрерывную поверхность.

Функция трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ называется непрерывной при $x = a, y = b, z = c$, если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b \\ z \rightarrow c}} f(x, y, z) = f(a, b, c),$$

каким бы путем x, y и z ни приближались соответственно к a, b и c .

Рассмотрим функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$. Если одной из независимых переменных придать приращение, то функция также получит приращение. Такое приращение называется *частным*. Так $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ и $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ — частные приращения функции $z = f(x, y)$.

Если приращение дать одновременно двум переменным, то функция получит полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Сформулируем теперь другое определение непрерывности функции: функция двух переменных называется *непрерывной в точке* $P_0(a; b)$, если бесконечно малым приращениям аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции.

Точнее, функция $f(x, y)$ является непрерывной в точке $P_0(a; b)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что если $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta$, то

$$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon.$$

Пример. Пользуясь определением непрерывности в точке, доказать непрерывность функции $f(x, y) = \sin(x + y)$ в точке $(a; b)$.

Решение. Оценим сверху абсолютную величину разности $|f(x, y) - f(a, b)|$:

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(a, b)| &= |\sin(x + y) - \sin(a + b)| = \\ &= \left| 2 \sin \frac{x + y - a - b}{2} \cos \frac{x + y + a + b}{2} \right| \leq \left| 2 \sin \frac{x + y - a - b}{2} \right| < \\ &< 2 \left| \frac{x + y - a - b}{2} \right| < |x - a| + |y - b|. \end{aligned}$$

Так как рассмотрению подлежат только точки, принадлежащие δ -окрестности точки $(a; b)$, то

$$|x - a| < \delta, \quad |y - b| < \delta.$$

Следовательно, имеем

$$|\sin(x + y) - \sin(a + b)| < \delta + \delta = 2\delta.$$

Положим $2\delta = \varepsilon$, откуда $\delta = \varepsilon/2$. Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ найдено такое число $\delta = \delta(\varepsilon) = \varepsilon/2 > 0$, что из неравенств $|x - a| < \delta$ и $|y - b| < \delta$ следует неравенство

$$|\sin(x + y) - \sin(a + b)| < \varepsilon.$$

Непрерывность данной функции в точке $(a; b)$ доказана.

Упражнения

Пользуясь определением предела функции доказать, что:

$$1. \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 3}} xy = 6. \quad 2. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 1}} (x + 3y - 1) = 0$$

$$3. \text{Найти предел } \lim_{\substack{x \rightarrow 3 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}.$$

Отв. 3.

Пользуясь определением непрерывности функции в точке, доказать непрерывность следующих функций:

4. $f(x, y) = 5x + 3y + 1$. 5. $f(x, y) = \cos(x + y)$. 6. $f(x, y) = 2x^2 + 7y^2 + 5$.

§ 5. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$. Придадим аргументу x приращение Δx , оставляя y неизменным. В этом случае функция получит частное приращение $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Предел отношения частного приращения функции к приращению соответствующего аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

называется *частной производной* от z по x и обозначается следующим образом:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = f'_x(x, y).$$

Аналогично определяется частная производная от z по y :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = f'_y(x, y).$$

Функция трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ имеет три частных производные первого порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}.$$

При дальнейшем увеличении числа переменных формулы частных производных получаются аналогично. Частная производная выражает скорость изменения функции в предположении, что меняется одно независимое переменное, а другие сохраняют постоянные значения.

Пример. Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ следующих функций двух переменных:

1) $z = x^3 + 3x^2y - y^3$.

Решение. Так как частные приращения функции получаются при изменении только одного аргумента, то для нахождения частной производной пользуются правилами дифференцирования функций одной независимой переменной. При нахождении производной данной функции по переменной x считаем постоянной величину y ; при дифференцировании по y постоянной будем считать x :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2.$$

$$2) \quad z = \operatorname{arctg} (2x - y).$$

Рассуждая аналогично, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2}{1 + (2x - y)^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{1 + (2x - y)^2}.$$

$$3) \quad u = x \ln (5y - 8z) + x^2 yz.$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln (5y - 8z) + 2xyz; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{5x}{5y - 8z} + x^2 z; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-8x}{5y - 8z} + x^2 y.$$

§ 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Выясним геометрический смысл частной производной функции двух независимых переменных $z = f(x, y)$. Графиком этой функции является некоторая поверхность ABC (рис. 18.5). Пересечем эту

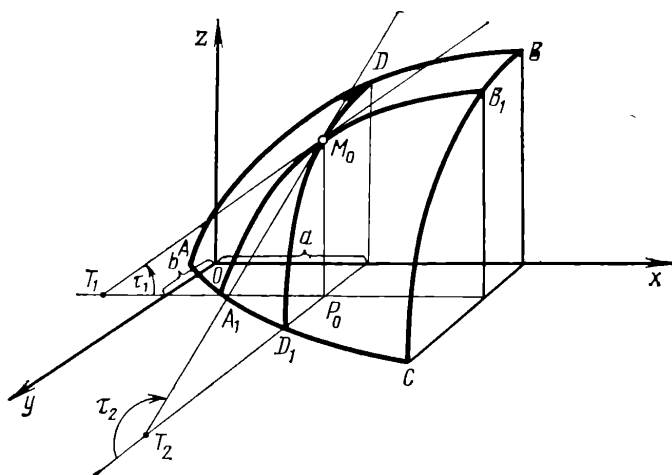


Рис. 18.5

поверхность плоскостью $y = b$, параллельной плоскости xOz . Линией пересечения является кривая $A_1 M_0 B_1$. Координаты точек этой линии должны удовлетворять уравнению $z = f(x, b)$. Так как $z = f(x, b)$ — функция одной переменной x , то, согласно геометрическому смыслу производной $\frac{\partial f(x, b)}{\partial x} = \operatorname{tg} \tau_1$, где τ_1 — угол, образованный касательной $M_0 T_1$, проведенной к кривой в точке M_0 . Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \tau_1.$$

При нахождении частной производной от z по y , полагая, что аргумент x величина постоянная ($x=a$) и проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(a, y + \Delta y) - f(a, y)}{\Delta y} = \operatorname{tg} \tau_2,$$

где τ_2 — угол, образованный касательной M_0T_2 с прямой, параллельной оси Oy , следовательно, и с осью Oy .

Пример. Площадь S прямоугольника определяется по формуле $S = bh$, где b — основание прямоугольника, h — его высота. Найти

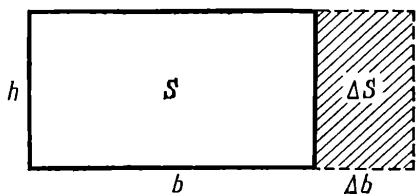


Рис. 18.6

частные производные $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ и объяснить геометрический смысл полученных результатов.

Решение. Частную производную $\frac{\partial S}{\partial b}$ находим, предполагая

$h = \text{const.}$ Тогда $\frac{\partial S}{\partial b} = h$. Аналогично

находим $\frac{\partial S}{\partial h} = b$.

Геометрический смысл полученных результатов иллюстрирует рис. 18.6. Если основание b получает приращение Δb , а высота h остается неизменной, то приращение площади ΔS находится по формуле $\Delta S = h\Delta b$, откуда $\frac{\Delta S}{\Delta b} = h$.

Поэтому

$$\frac{\partial S}{\partial b} = \lim_{\Delta b \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta b} = h.$$

Аналогично выясняется геометрический смысл частной производной $\frac{\partial S}{\partial h} = b$.

§ 7. ЧАСТНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ. ПОЛНЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Рассмотрим непрерывную функцию двух независимых переменных $z = f(x, y)$, имеющую непрерывные производные. Если одну из переменных величин, например y , считать постоянной, то данная функция будет функцией одной переменной x . Ее приращение, соответствующее приращению аргумента Δx , называется *частным приращением* функции z по x и обозначается

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (18.4)$$

Аналогично находится частное приращение по y , т. е. приращение функции z , которое она получает при изменении y в предположении, что переменная x постоянна:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (18.5)$$

Приращение Δz функции $z = f(x, y)$, которое она получает в случае, если одновременно изменяются x и y , принимая приращения Δx и Δy , называется *полным приращением*:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (18.6)$$

В правой части равенства (18.6) вычтем и прибавим $f(x, y + \Delta y)$. Тогда имеем

$$\Delta z = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]. \quad (18.7)$$

Частные и полные приращения показаны на рис. 18.7. Каждую разность в квадратных скобках можно рассматривать как разность двух значений функции одной независимой переменной, так как в первом случае $y = \text{const}$, а во втором $x = \text{const}$. Применим к каждой из разностей равенства (18.7) теорему Лагранжа:

$$\begin{aligned} & f(x + \Delta x, y + \Delta y) - \\ & - f(x, y + \Delta y) = \\ & = \Delta x f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y), \end{aligned} \quad (18.8)$$

$$\begin{aligned} & f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \\ & = \Delta y f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y), \end{aligned} \quad (18.9)$$

где $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

В первом случае производная берется по x , так как изменяется только x , а во втором по y , так как изменяется только y . На основании определения предела имеем

$$f'_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) = f'_x(x, y) + \varepsilon_1, \quad (18.10)$$

$$f'_y(x, y + \theta_2 \Delta y) = f'_y(x, y) + \varepsilon_2. \quad (18.11)$$

Отсюда

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x f'_x(x, y) + \varepsilon_1 \Delta x;$$

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y f'_y(x, y) + \varepsilon_2 \Delta y.$$

Подставляя найденные значения в равенство (18.7), получаем

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \quad (18.12)$$

Первые два слагаемых в последнем равенстве бесконечно малые первого порядка малости, а последние два — бесконечно малые высшего порядка малости. Таким образом, первые два слагаемых представляют главную часть приращения функции.

Главная часть приращения функции называется *полным дифференциалом*. При этом $dz \approx \Delta z$.

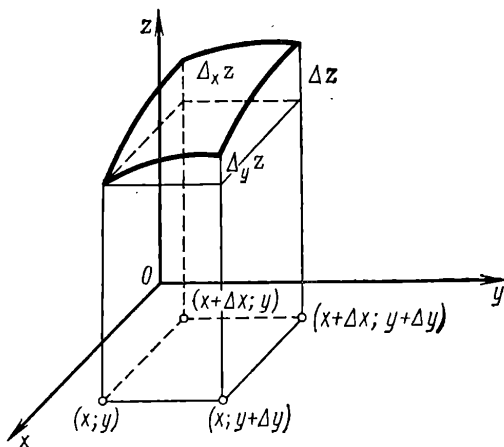


Рис. 18.7

Приращения независимых переменных равны их дифференциалам и можно написать

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

Слагаемые, стоящие в правой части равенства, называются *частными дифференциалами* функции и обозначаются соответственно

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx \quad \text{и} \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z, \quad (18.13)$$

т. е. полный дифференциал функции равен сумме частных дифференциалов.

Полное приращение функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ определяется по формуле

$$\Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - f(x, y, z), \quad (18.14)$$

где $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ — приращения независимых переменных.

По определению приращения независимых переменных $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и их дифференциалы dx, dy и dz — равны между собой: $\Delta x = dx, \Delta y = dy, \Delta z = dz$. Следовательно, полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = d_x u + d_y u + d_z u,$$

или

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (18.15)$$

Полный дифференциал du функции трех переменных есть главная часть ее приращения Δu , линейная относительно $\Delta x, \Delta y$ и Δz , т. е.

$$\Delta u \approx du,$$

причем при бесконечно малых $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ разность $\Delta u - du$ есть величина бесконечно малая.

Понятие полного дифференциала можно распространить на функцию многих переменных $u = f(x, y, z, \dots)$:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz + \dots \quad (18.16)$$

Пример 1. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{5x+3y}{9x-2y}$.

Решение. Находим частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{5(9x-2y) - 9(5x+3y)}{(9x-2y)^2} = \frac{45x-10y-45x-27y}{(9x-2y)^2} = -\frac{37y}{(9x-2y)^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{3(9x+2y) + 2(5x+3y)}{(9x-2y)^2} = \frac{27x-6y+10x+6y}{(9x-2y)^2} = \frac{37x}{(9x-2y)^2}. \end{aligned}$$

Полный дифференциал данной функции

$$dz = -\frac{37y}{(9x-2y)^2} dx + \frac{37x}{(9x-2y)^2} dy.$$

Пример 2. Найти полный дифференциал функции $z = \ln(3x + 2y)$.

Решение. Находим частные производные функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3x+2y} \cdot 3 = \frac{3}{3x+2y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3x+2y} \cdot 2 = \frac{2}{3x+2y}.$$

Полный дифференциал данной функции

$$dz = \frac{3}{3x+2y} dx + \frac{2}{3x+2y} dy.$$

Пример 3. Найти полный дифференциал функции $z = e^{12x+5y}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{12x+5y} \cdot 12 = 12e^{12x+5y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{12x+5y} \cdot 5 = 5e^{12x+5y}.$$

Полный дифференциал

$$dz = 12e^{12x+5y} dx + 5e^{12x+5y} dy.$$

Упражнения

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Отв. $dz = \frac{2(x dx + y dy)}{x^2 + y^2}$.

2. $z = x \ln y$.

Отв. $dz = \ln y dx + \frac{x}{y} dy$.

3. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$.

Отв. $dz = \frac{2(y dx - x dy)}{y^2 \sin^2 \frac{x}{y}}$.

4. $z = xe^{-yx}$.

Отв. $dz = e^{-yx} [(1 - xy) dx - x^2 dy]$.

5. $z = e^{ax} \sin by$.

Отв. $dz = e^{ax} (a \sin by dx + b \cos by dy)$.

6. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Отв. $dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

7. Дана функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, причем $x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$. Доказать справедливость равенства

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

8. Доказать, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

9. Доказать, что если $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, то имеет место равенство

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

§ 8. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Рассмотрим функцию двух переменных. Частное приращение функции $z = f(x, y)$ по x зависит и от x и от y , т. е. является функцией двух независимых переменных:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (18.17)$$

Если взять от функции приращение по y , то получим *второе приращение* $\Delta_y(\Delta_x z)$ данной функции

$$\Delta_y(\Delta_x z) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)], \quad (18.18)$$

или

$$\Delta_y(\Delta_x z) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y). \quad (18.18')$$

Аналогичное выражение получим и для второго приращения $\Delta_x(\Delta_y z)$:

$$\Delta_x(\Delta_y z) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] = \\ = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y). \quad (18.19)$$

Следовательно,

$$\Delta_y(\Delta_x z) = \Delta_x(\Delta_y z). \quad (18.20)$$

Как уже известно, частное приращение функции $z = f(x, y)$ по y равно

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y), \quad (18.21)$$

а полное приращение

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (18.22)$$

Складывая равенства (18.17), (18.19), (18.21) и учитывая равенство (18.22), представим полное приращение функции двух независимых переменных в виде суммы частных приращений $\Delta_x z$, $\Delta_y z$ и второго приращения $\Delta_x(\Delta_y z)$:

$$\Delta z = \Delta_x z + \Delta_y z + \Delta_x(\Delta_y z). \quad (18.23)$$

Предположим, что данная функция z непрерывна и имеет в точке $(x; y)$ частные производные. Тогда

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \varepsilon' \Delta x, \quad \Delta_y z = \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon'' \Delta y,$$

где ε' и ε'' — бесконечно малые, стремящиеся к нулю вместе с Δx и Δy , и, следовательно, вместе с величиной $\rho = |\Delta x| + |\Delta y|$. Если рассматривается одновременное изменение x и y по любому

закону, то положительными или отрицательными значениями Δx и Δy около точки $(x; y)$ определяется прямоугольная область со сторонами $2|\Delta x|$ и $2|\Delta y|$. Безграничное уменьшение этой области можно связать с уменьшением, например, четверти ее периметра, которую обозначим ρ . Таким образом, вместо двух независимых одна от другой бесконечно малых величин Δx и Δy вводится одна величина ρ как главная бесконечно малая, относительно которой будем определять порядок других бесконечно малых.

Тогда полное приращение функции (18.23) можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon' \Delta x + \varepsilon'' \Delta y + \Delta_y (\Delta_x z). \quad (18.24)$$

Если полное приращение функции можно представить в виде

$$\Delta z = M \Delta x + N \Delta y + (\text{бесконечно малые высшего порядка}), \quad (18.25)$$

где величины M и N не зависят от Δx и Δy , то функция называется *дифференцируемой*. В этом случае величины M и N равны частным производным: $M = \frac{\partial z}{\partial x}$, $N = \frac{\partial z}{\partial y}$. Действительно, полагая в равенстве (18.25) $\Delta y = 0$, разделив почленно на Δx и переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = M.$$

Аналогично,

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} = N.$$

На основании вышеизложенного сформулируем достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных. Для того чтобы функция $z = f(x, y)$ была дифференцируемой в точке $(x; y)$, достаточно:

- 1) существование в этой точке частных производных по x и y ;
- 2) существование частной производной по одной из переменных, например по y , в некоторой окрестности точки $(x; y)$ и ее непрерывность в этой точке.

§ 9. ПРИЛОЖЕНИЕ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

Полным дифференциалом функции нескольких переменных можно пользоваться при приближенных вычислениях приращений функций. Вычисление погрешности результата алгебраических действий производят по формуле

$$\Delta f(x, y, z) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \quad (18.26)$$

Левую часть приближенного равенства можно рассматривать как абсолютную погрешность результата, а Δx , Δy , Δz , ... — как абсолютные погрешности величин, над которыми производились действия.

Пусть $f(x, y) = x + y$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

и по формуле (18.26) получаем

$$\Delta(x + y) = \Delta x + \Delta y,$$

т. е. получена известная формула оценки погрешности суммы.

Если $f(x, y) = x - y$, то

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1,$$

значит, и в этом случае

$$\Delta(x - y) = \Delta x + \Delta y$$

(учитываются абсолютные значения частных производных).

Полагая $f(x, y) = xy$, получим формулу для оценки относительной погрешности произведения. В этом случае

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

и

$$\Delta(xy) = y \Delta x + x \Delta y,$$

или, после почленного деления на xy , окончательно имеем

$$\frac{\Delta(xy)}{xy} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y},$$

т. е. относительная погрешность произведения равна сумме относительных погрешностей сомножителей.

Пусть $f(x, y) = \frac{x}{y}$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}.$$

По формуле (18.26) имеем

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \Delta x - \frac{x}{y^2} \Delta y.$$

Разделив последнее выражение почленно на x/y , получаем

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\frac{x}{y}} = \frac{\Delta x}{x} - \frac{\Delta y}{y}.$$

Аналогично получаются формулы для оценки погрешности степени и корня

$$\frac{\Delta(x^n)}{x^n} = n \frac{\Delta x}{x}; \quad \frac{\Delta \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} = \frac{\Delta x}{x} \frac{1}{n}.$$

Пример 1. Вычислить приближенно число $a = (4,04)^{2,03}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^y$. Данное число a есть приращение этой функции в точке $A(4; 2)$ при $\Delta x = 0,04$ и $\Delta y = 0,03$. Дифференциал функции

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y = yx^{y-1} \Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Найдем значение дифференциала в точке $A(4; 2)$:

$$(df)_A = 2 \cdot 4 \cdot 0,04 + 4^2 \cdot \ln 4 \cdot 0,03 = 0,32 + 0,48 \ln 4 = \\ = 0,32 + 0,48 \cdot 1,39 = 0,99.$$

Искомое число

$$a = f(4,04; 2,03) \approx f(4; 2) + (df)_A = 4^2 + 0,99 = 16,99.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\sqrt{3,02^2 + 3,98^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3$ и $y = 4$ и заменяя ее приращение дифференциалом.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad dz = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Найдем значение функции в точке $(3; 4)$:

$$z_{x=3, y=4} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

Вычислим приращение аргумента x : $\Delta x = dx = 0,02$, а затем приращение аргумента y : $\Delta y = dy = -0,02$.

Таким образом, приращение функции

$$\Delta z \approx \frac{3 \cdot 0,02 + 4 \cdot (-0,02)}{5} = -\frac{0,02}{5} = -0,004.$$

Искомая величина

$$\sqrt{3,02^2 + 3,98^2} \approx 5 - 0,004 = 4,996.$$

Пример 3. Вычислить объем V цилиндра, если его радиус $R \approx 10 (\pm 0,2)$ см, высота $H \approx 30 (\pm 0,2)$ см; $\pi = 3,14 (\pm 0,01)$.

Решение. По формуле $V = \pi R^2 H$ находим приближенное значение объема

$$V = 9420 \text{ см}^3.$$

Вычислим относительную погрешность найденного приближенного значения, воспользовавшись формулами для оценки погрешностей произведения и степени:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta H}{H};$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0,01}{3,14} + \frac{0,4}{10} + \frac{0,2}{30} = 0,003 + 0,04 + 0,007 = 0,05 = 5\%.$$

Итак, $V \approx 9420 (\pm 5\%) \text{ см}^3$. Истинный объем отличается от вычисленного не более чем на 5%.

Пример 4. Найти приближенные значения приращений следующих функций, если независимая переменная x изменяется от $x=0,00$ до $x=0,01$:

1) $y = e^{9x}$; 2) $y = \sin 6x$; 3) $y = \operatorname{tg} x$.

Решение: 1) Дифференциал функции при произвольных значениях x и dx :

$$y' = e^{9x} (9x)' = 9e^{9x}; \quad dy = 9e^{9x} dx.$$

Находим приращение функции, равное приближенно значению ее дифференциала при $x=0,00$ и $dx=0,01$:

$$\Delta y \approx dy \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = 9e^{9x} dx \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = 9 \cdot e^0 \cdot 0,01 = 9 \cdot 1 \cdot 0,01 = 0,09.$$

2) Дифференциал функции при произвольных значениях x и dx :

$$y' = 6 \cos 6x; \quad dy = 6 \cos 6x dx.$$

Находим приращение функции

$$\Delta y \approx dy \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = 6 \cos 6x dx \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = 6 \cos (6 \cdot 0) \cdot 0,01 = 0,06.$$

3) Дифференциал функции при произвольных значениях x и dx :

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad dy = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Находим приращение функции

$$\Delta y \approx dy \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = \frac{dx}{\cos^2 x} \Big|_{\substack{x=0 \\ dx=0,01}} = \frac{0,01}{\cos^2 0} = \frac{1}{1^2} \cdot 0,01 = 0,01.$$

Пример 5. Пользуясь формулой Клапейрона $vp = RT$, найти изменение давления газа p . Первоначальные значения переменных: $T = 300^\circ \text{C}$, $p = 1000 \text{ Н/м}^2$, $\Delta T = 1^\circ$, $v = 14,4 \text{ м}^3$, $\Delta v = 0,1 \text{ м}^3$.

Решение. Подставляем исходные данные в формулу Клапейрона:

$$14,4 \cdot 1000 = 300R,$$

откуда $R = 48$.

Таким образом, давление газа

$$p = \frac{48T}{v}.$$

Дифференцируя это равенство по T , получим

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{48}{v};$$

дифференцируя это равенство по v , имеем

$$\frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{48T}{v^2}.$$

Полный дифференциал

$$dp = \frac{\partial p}{\partial T} dT + \frac{\partial p}{\partial v} dv = \frac{48}{v} dT - \frac{48T}{v^2} dv.$$

Итак,

$$\Delta p \approx \frac{48}{14,4} \cdot 1 - \frac{48 \cdot 300}{(14,4)^2} \cdot 0,1 = 48 \frac{14,4 - 30}{(14,4)^2} = -\frac{48 \cdot 15,6}{14,4 \cdot 14,4} \approx -3,6 \text{ Н/м}^2.$$

Упражнения

1. Вычислить с точностью до 0,01 выражение $3,02^{2,01}$.

Отв. 9,22.

2. Основание прямоугольника $a=10$ см, высота $b=24$ см. Как изменится диагональ l прямоугольника, если основание увеличить на 4 мм, а высоту b уменьшить на 1 мм?

Отв. диагональ увеличится на 0,065 см.

3. При деформации цилиндра его радиус увеличился на 0,05 м, а высота уменьшилась на 0,2 м. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала изменение объема, если первоначальные размеры $r=2$ м, $h=10$ м.

Отв. $1,2 \pi \text{ м}^3$.

4. Высота конуса $h=10$ см, радиус основания $r=5$ см. Как изменится объем конуса, если высоту увеличить на 2 мм, а радиус основания уменьшить на 2 мм?

Отв. $\approx 15,7 \text{ см}^3$.

§ 10. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть дана функция трех переменных $u=f(x, y, z)$, причем аргументы этой функции являются в свою очередь функциями одной независимой переменной t , т. е.

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t). \quad (18.27)$$

Функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ непрерывны и имеют производные в рассматриваемой области изменения t . Тогда функция $u=f(x, y, z)$ есть сложная функция переменной t . Если эта функция непрерывна относительно аргументов x, y, z и имеет полный дифференциал в соответствующей области, то она имеет и производную по t .

Пусть независимая переменная t получает приращение Δt , тогда аргументы x, y, z и функция u получают соответственно приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ и Δu , которые, ввиду непрерывности рассматриваемых функций, стремятся к нулю вместе с Δt . При любых приращениях аргументов x, y, z , соответствующих приращению Δt , приращение функции u , после выделения главной части, можно представить в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \epsilon \rho, \quad (18.28)$$

где $\rho = |\Delta x| + |\Delta y| + |\Delta z|$ стремится к нулю вместе с Δt , а ϵ стремится к нулю вместе с ρ . Приращения $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ при условиях (18.27) не совпадают с дифференциалами аргументов, что было бы, если бы x, y, z являлись независимыми переменными. На основании равенства (18.28) составим отношение

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \epsilon \frac{\rho}{\Delta t}. \quad (18.29)$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial x} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial y} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial u}{\partial z} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left| \frac{\rho}{\Delta t} \right|.$$

Рассмотрим предел

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left| \frac{\rho}{\Delta t} \right| &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| + \left| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right| + \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \right) = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x}{\Delta t} \right| + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta t} \right| + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta z}{\Delta t} \right| \right) = \\ &= \left(\left| \frac{dx}{dt} \right| + \left| \frac{dy}{dt} \right| + \left| \frac{dz}{dt} \right| \right) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0, \end{aligned}$$

который равен нулю, так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon = 0$, поэтому

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}. \quad (18.30)$$

Эта формула дифференцирования сложной функции является обобщением формулы дифференцирования функции от функции.

Аналогично, для функции двух переменных $z = f(x, y)$, где аргументы x и y являются функциями одной независимой переменной t , т. е. $x = x(t)$, $y = y(t)$, производная от функции z по независимой переменной t имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (18.31)$$

Пример 1. Найти производную функции $y = (4 + x^2)^{\cos x}$.

Решение. Рассмотрим функцию y как сложную функцию $y = u^v$, где $u = u(x) = 4 + x^2$ и $v = v(x) = \cos x$. Тогда производная сложной функции

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dx}.$$

Находим производные:

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x.$$

При постоянном v выражение $y = u^v$ является степенной функцией и частная производная

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v u^{v-1};$$

при постоянном u это выражение является показательной функцией и частная производная

$$\frac{\partial y}{\partial v} = u^v \ln u.$$

Подставляя найденные выражения производных в исходную формулу, получим

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= vu^{v-1} \cdot 2x + u^v \ln u \cdot \cos x = \\ &= (4+x^2)^{\cos x} \left[\frac{2x \cos x}{4+x^2} + \cos x \ln (4+x^2) \right].\end{aligned}$$

Если функция $z = f(u, v)$ есть сложная функция двух переменных u и v , каждая из которых в свою очередь является функцией двух независимых переменных x и y , то и функция z есть функция независимых переменных x и y , а ее частные производные по этим переменным вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\tag{18.32}$$

Пример 2. Дана сложная функция $z = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$, где $u = x \sin y$, $v = x \cos y$. Найти частные производные функции z по x и по y .

Решение. Воспользуемся формулами (18.32). Частные производные таковы:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \frac{1}{v} = \frac{v}{u^2 + v^2}; \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{1}{1 + \frac{u^2}{v^2}} \left(-\frac{u}{v^2} \right) = -\frac{u}{u^2 + v^2}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \cos y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -x \sin y.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{v}{u^2 + v^2} \sin y - \frac{u}{u^2 + v^2} \cos y = \frac{1}{u^2 + v^2} (v \sin y - u \cos y) = \\ &= \frac{1}{x^2 \sin^2 y + x^2 \cos^2 y} (x \sin y \cos y - x \sin y \cos y) = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 1.\end{aligned}$$

Упражнения

Найти производные $\frac{du}{dx}$ сложных функций:

1. $u = y^2 + z^2 + yz$, если $y = e^x$, $z = \sin x$.

Отв. $\frac{du}{dx} = 3e^{3x} + e^x (\sin x + \cos x) + \sin 2x$.

2. $u = v^2 + yv$, если $v = \ln x$, $y = e^x$.

Отв. $\frac{du}{dx} = \frac{2v+y}{x} + ve^x$.

3. $u = \sin \frac{x}{y}$, если $x = e^t$, $y = t^2$.

Отв. $\frac{du}{dx} = (t-2) \frac{e^t}{t^3} \cos \frac{e^t}{t^2}$.

4. $z = \sin(3u + 2v - 4w)$, где $u = 2x^3$, $v = 3x^2$, $w = x^4$.

Отв. $\frac{dz}{dx} = (18x^2 + 12x - 16x^3) \cos(6x^3 + 6x^2 - 4x^4)$.

5. $u = \operatorname{tg}(3x + 2y^2 - z)$, где $y = \frac{1}{x}$, $z = \sqrt{x}$.

Отв. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2(3x + 2y^2 - z)} \left(3 - \frac{4y}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$.

§ 11. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Неявными называются функции, заданные соотношениями между независимыми и зависимыми переменными, не разрешенными относительно последних:

$$f(x, y, z, \dots) = 0.$$

Правило дифференцирования сложной функции дает возможность находить также производные неявных функций как одной, так и нескольких переменных. В первом случае неявная функция y задается уравнением вида

$$f(x, y) = 0,$$

где y есть функция x .

Рассмотрим дифференцирование неявной функции одной независимой переменной. Требуется найти $\frac{dy}{dx}$. Полный дифференциал от обеих частей последнего равенства

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

или (после деления на dx)

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда искомая производная

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}. \quad (18.33)$$

Итак, для нахождения производной неявной функции нужно найти частную производную функции по x , разделить ее на частную производную по y и отношение этих производных взять со знаком минус.

Рассмотрим неявную функцию z двух переменных, определяемую уравнением вида

$$F(x, y, z) = 0,$$

где x и y — независимые переменные, а $z = \varphi(x, y)$.

Найдем частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Полный дифференциал от обеих частей равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

При нахождении $\frac{\partial z}{\partial x}$ считаем переменную y постоянной, следовательно, $\frac{\partial F}{\partial y} dy = 0$. Разделив на dx , имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (18.34)$$

При нахождении $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем x постоянной, следовательно, $\frac{\partial F}{\partial x} dx = 0$ и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}. \quad (18.34')$$

Пример 1. Найти производную функции y , заданной уравнением $x^3 + 2xy - y^2 + 2x - 3y + 5 = 0$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y + 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y - 3,$$

откуда по формуле (18.33)

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 + 2y + 2}{2x - 2y - 3}.$$

Пример 2. Найти производную функции, заданной уравнением $x \ln y + y \ln x = 0$.

Решение. Согласно формуле (18.33), имеем

$$y' = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{\ln y + \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \ln x} = - \frac{y(x \ln y + y)}{x(x + y \ln x)}.$$

Пример 3. Найти частные производные функции z , заданной уравнением

$$F(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + z - xyz + 6y + 7 = 0.$$

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - yz; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - xz + 6; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 1 - xy.$$

Тогда, согласно равенствам (18.34) и (18.34'),

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{3x^2 - yz}{1 - xy}; \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y - xz + 6}{1 - xy}.$$

Пример 4. Найти частные производные функции z , заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Используя соотношения (18.34) и (18.34'), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{2x/a^2}{2z/c^2} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{2y/b^2}{2z/c^2} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти производную функции, заданной уравнением $x^2 y^3 + x^4 y - 3x = 0$, двумя способами:

1) нахождением производной от неявной функции при помощи частных производных, т. е. по формуле (18.33);

2) нахождением производной неявной функции одной независимой переменной.

Решение. Левая часть данного уравнения есть функция x и y . Находим

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3 + 4x^3y - 3; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2 + x^4.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3 + 4x^3y - 3}{x^2(3y^2 + x^2)}.$$

Продифференцируем данную функцию, учитывая, что y есть функция x :

$$3x^2y^2y' + 2xy^3 + x^4y' + 4x^3y - 3 = 0.$$

Группируем члены, содержащие y' :

$$y'(3x^2y^2 + x^4) + 2xy^3 + 4x^3y - 3 = 0.$$

Решим это уравнение относительно y' :

$$y'(3x^2y^2 + x^4) = -(2xy^3 + 4x^3y - 3),$$

откуда находим

$$y' = -\frac{2xy^3 + 4x^3y - 3}{3x^2y^2 + x^4}.$$

Упражнения

Найти производные неявных функций, заданных следующими уравнениями:

1. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

Отв. $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$.

2. $xy = -\ln(xy)$.

Отв. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 1$.

Отв. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x-z}$.

4. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$.

Отв. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\sin 2x}{\sin 2z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\sin 2y}{\sin 2z}$.

5. Найти полный дифференциал функции $z = ye^{\frac{x}{z}}$.

Отв. $dz = \frac{ze^{\frac{x}{z}}(zdy + ydx)}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}$.

6. $ye^{x+z} = z^k$. Показать, что $\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial y}$.

§ 12. ПОЛНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ. ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ — непрерывные функции, имеющие производные. В этом случае z является, в конечном счете, функцией одной независимой переменной t , но выражается через две промежуточные переменные. Если независимой переменной t дать приращение Δt , то приращение получают также x , y и z :

$$\Delta z = f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y. \quad (18.35)$$

Разделим это равенство на приращение независимой переменной и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} &= f'_x(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$ и $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} = 0$, то производная

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \frac{dx}{dt} + f'_y(x, y) \frac{dy}{dt}.$$

Тогда

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(x, y) \varphi'(t) + f'_y(x, y) \psi'(t). \quad (18.36)$$

Полученное выражение называется *формулой полной производной* функции двух аргументов, которые являются функциями независимой переменной t .

Умножив равенство (18.36) на dt , получим полный дифференциал функции двух зависимых переменных

$$dz = f'_x(x, y) \varphi'(t) dt + f'_y(x, y) \psi'(t) dt. \quad (18.37)$$

Так как $\varphi'(t) dt = dx$ и $\psi'(t) dt = dy$, то полный дифференциал определяется по формуле

$$dz = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy. \quad (18.38)$$

Здесь dx и dy есть дифференциалы функций.

В случае, если один из аргументов является функцией другого, формула для нахождения полной производной несколько видоизменится. Если x — независимая переменная, а $y = \varphi(x)$, то

$$\frac{dz}{dx} = f'_x(x, y) \cdot 1 + f'_y(x, y) \varphi'(x),$$

или

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (18.39)$$

Если x является функцией независимой переменной y , т. е. $x = \varphi(y)$, то

$$\frac{dz}{dy} = f'_x(x, y) \varphi'(y) + f'_y(x, y) \cdot 1,$$

или

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (18.40)$$

Если равенства (18.39) и (18.40) умножить на дифференциал независимой переменной, то получим формулу полного дифференциала.

Итак, форма полного дифференциала функции двух переменных $z = f(x, y)$ не зависит от характера изменения аргументов x и y . Полученные результаты представлены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Характер изменения x и y	Полный дифференциал	Полная производная
x и y — независимые переменные	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$	нет
x и y — функции неза- висимой переменной t	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$	$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$
x — независимая пере- менная, y — функция x	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$	$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx}$
y — независимая пере- менная, x — функция y	$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$	$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}$

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ полный дифференциал

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Функция многих переменных имеет полную производную в том случае, если она в конечном счете зависит от одной независимой переменной. Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ можно составить аналогичную таблицу.

Т а б л и ц а 3

Характер изменения x, y, z	Полный дифференциал	Полная производная
x, y и z — независимые переменные	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	нет
x, y и z — функции независимой переменной t	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$
x — независимая переменная, y, z — функции x	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}$
y — независимая переменная, x, z — функции y	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dy}$
z — независимая переменная, x, y — функции z	$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$	$\frac{du}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dz} + \frac{\partial u}{\partial z}$

§ 13. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ, ИХ НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же аргументов и их можно опять дифференцировать по этим аргументам. При этом будем получать частные производные высшего порядка.

Например, функция $z = f(x, y)$ имеет две частные производные первого порядка: $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Каждую из этих производных можно дифференцировать по x и по y . При этом получим четыре частные производные второго порядка:

1) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ (частная производная второго порядка от z по x дважды);

2) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ (частная производная второго порядка от z , взятая первый раз по x , второй раз по y);

3) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ (частная производная второго порядка от z , взятая первый раз по y , второй раз по x);

4) $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (частная производная второго порядка от z , взятая по y дважды).

Однако две из них равны между собой: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, т. е. производная второго порядка по обоим переменным не зависит от порядка дифференцирования. Это свойство справедливо для всех частных производных высшего порядка функций многих переменных.

Если дифференцировать производные второго порядка, то получим частные производные третьего порядка, которые обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

При этом нужно помнить, что

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x}.$$

Сокращенно производные второго порядка записываются в виде $z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}$; третьего порядка — в виде $z'''_{xxx}, z'''_{xxy}, z'''_{xyy}, z'''_{yyy}$.

Пример 1. Найти производные второго порядка функции $z = \arcsin \frac{x}{y}$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\frac{1}{y}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{-\frac{x}{y^2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}}} = -\frac{x}{y \sqrt{y^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Находим частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{\frac{2x}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y^2 - x^2} = -\frac{x}{(y^2 - x^2)^{3/2}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{\frac{2y}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y^2 - x^2} = -\frac{y}{(y^2 - x^2)^{3/2}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= -\frac{y \sqrt{y^2 - x^2} - x \frac{-2xy}{2\sqrt{y^2 - x^2}}}{y^2 (y^2 - x^2)} = -\frac{y (y^2 - x^2 + x^2)}{y^2 (y^2 - x^2)^{3/2}} = -\frac{y}{(y^2 - x^2)^{3/2}}; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{x \left(\frac{2y^2}{2\sqrt{y^2 - x^2}} + \sqrt{y^2 - x^2} \right)}{y^2 (y^2 - x^2)} = \frac{x (y^2 + y^2 - x^2)}{y^2 (y^2 - x^2)^{3/2}} = \frac{x (2y^2 - x^2)}{y^2 (y^2 - x^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Сравнивая частные производные второго порядка, видим, что

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Пример 2. Найти производные третьего порядка функции $u = z^3 e^{x-2y}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 e^{x-2y}.$$

Частные производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2z^3 e^{x-2y}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 3z^2 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4z^3 e^{x-2y}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = -6z^2 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z e^{x-2y}. \end{aligned}$$

Частные производные третьего порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} &= z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = -2z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} = 3z^2 e^{x-2y}; \\ \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} &= 4z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = -6z^2 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} = 6z e^{x-2y}; \\ \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} &= -8z^3 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial z} = 12z^2 e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2} = -12z e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 6e^{x-2y}. \end{aligned}$$

Упражнения

Найти частные производные второго порядка следующих функций:

1. $z = \ln(x-y)$.

Отв. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(x-y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x-y)^2}.$

2. $z = x^2/(1-2y)$, $y \neq 1/2$.

Отв. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{1-2y}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{(1-2y)^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{8x^2}{(1-2y)^3}.$

3. $z = xy$.

Отв. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$

4. $z = e^{xy}$.

Отв. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy}(xy+1); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy}.$

5. Найти частные производные третьего порядка функции

$$z = x^4 + 3x^3y - 4x^2y^2 + 5xy^3 - y^4.$$

Отв. $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 24x + 18y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 30x - 24y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2} = 18x - 16y;$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} = -16x + 30y.$$

6. Дана функция $z = \sin(xy)$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2}$.

Отв. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y^2} = -x(2 \sin xy + xy \cos xy)$.

7. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}$.

8. Показать, что функция $u = \frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$, где a и b постоянные

удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

9. Показать, что функция $u = \frac{1}{r}$, где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$.

§ 14. ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть дана функция

$$z = f(x, y),$$

где x, y — функции t . Полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Найдем дифференциал второго порядка как дифференциал от дифференциала первого порядка (по правилам дифференцирования суммы и произведения):

$$\begin{aligned} d^2 z &= d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx \right) + d \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy \right) = \\ &= dx d \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} d(dx) + dy d \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} d(dy) = \\ &= dx \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + dy \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy \right) + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y. \end{aligned}$$

Итак,

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

Так как дифференциал независимой переменной есть произвольная постоянная величина, равная приращению переменной, то дифференциал второго порядка от независимой переменной равен нулю.

Пусть $z = f(x, y)$, где $y = \varphi(x)$, x — независимая переменная, $dx = \Delta x$ (постоянная) и $d^2 x = 0$. Тогда

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial y} d^2 y.$$

Если $x = \psi(y)$, то y — независимая переменная, $dy = \Delta y$ (постоянная) и $d^2y = 0$. В этом случае

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x} d^2x.$$

Если x и y независимые переменные, то дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2. \quad (18.41)$$

Из полученных соотношений видно, что дифференциал второго порядка инвариантностью не обладает. Найдем дифференциал третьего порядка

$$d^3z = d(d^2z) = d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2\right).$$

Так как dx и dy — постоянные величины, то

$$\begin{aligned} d^3z &= dx^2 d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2dx dy d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) + dy^2 d\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \\ &= dx^2 \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dy\right) + 2dx dy \left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dy\right) + \\ &+ dy^2 \left(\frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \partial x} dx + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy\right) = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + \\ &+ 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3. \end{aligned} \quad (18.42)$$

Итак, если $z = f(x, y)$, где x и y независимые переменные, то

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Сравнивая эти зависимости, подмечаем закономерность, напоминающую степень двучлена (формула бинома Ньютона). Поэтому дифференциал четвертого порядка можно сразу написать в виде

$$\begin{aligned} d^4z &= \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} dx^4 + 4 \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} dx^3 dy + 6 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} dx^2 dy^2 + \\ &+ 4 \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} dx dy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} dy^4. \end{aligned} \quad (18.43)$$

Для нахождения дифференциала любого порядка можно записать символическую формулу

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^n f(x, y). \quad (18.44)$$

Пользуясь установленной зависимостью, можно получить формулу для нахождения дифференциала второго порядка функции трех независимых переменных. По своему виду она должна быть похожа на квадрат трехчлена.

Итак, если $u = f(x, y, z)$, то

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \\ + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} dx dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz.$$

Эту формулу можно также получить, взяв дифференциал от дифференциала первого порядка.

Пример 1. Найти полную производную $\frac{du}{dt}$ и дифференциал второго порядка функции $u = e^{x-2y}$, где $x = \sin 3t$, $y = t^2$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x-2y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{x-2y}; \quad \frac{dx}{dt} = 3 \cos 3t; \quad \frac{dy}{dt} = 2t.$$

Поэтому полная производная

$$\frac{du}{dt} = 3e^{x-2y} \cos 3t - 4te^{x-2y},$$

или

$$\frac{du}{dt} = e^{x-2y} (3 \cos 3t - 4t).$$

Далее имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2e^{x-2y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4e^{x-2y};$$

$$dx = 3 \cos 3t dt; \quad d^2x = -9 \sin 3t dt^2; \quad dy = 2t dt; \quad d^2y = 2dt^2.$$

Дифференциал второго порядка

$$d^2u = e^{x-2y} 9 \cos^2 3t dt^2 - 24te^{x-2y} \cos 3t dt^2 + 16e^{x-2y} t^2 dt^2 - \\ - 9e^{x-2y} \sin 3t dt^2 - 4e^{x-2y} dt^2 = \\ = e^{x-2y} (9 \cos^2 3t - 24t \cos 3t + 16t^2 - 9 \sin 3t - 4) dt^2,$$

или

$$d^2u = e^{x-2y} [(3 \cos 3t - 4t^2) - 9 \sin 3t - 4] dt^2.$$

Пример 2. Найти дифференциал второго порядка функции $z = \ln(e^x + e^{2y})$, где $y = x^2$.

Решение. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2e^{2y}}{e^x + e^{2y}}; \quad dy = 2x dx.$$

Полный дифференциал

$$dz = \frac{e^x}{e^x + e^{2y}} dx + \frac{2e^{2y}}{e^x + e^{2y}} 2x^2 dx = (e^x + 6x^2 e^{2y}) \frac{dx}{e^x + e^{2y}}.$$

Полная производная

$$\frac{dz}{dx} = \frac{e^x + 6x^2 e^{2y}}{e^x + e^{2y}}.$$

Частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^2};$$
$$d^2y = 6x dx^2.$$

Дифференциал второго порядка

$$d^2z = \frac{e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^3} dx^2 - \frac{12x^2 e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^2} dx^2 + \frac{36x^4 e^{x+2y}}{(e^x + e^{2y})^2} dx^2 +$$
$$+ 12 \frac{x e^{2y}}{e^x + e^{2y}} dx^2 = \frac{e^{x+2y} (1 - 6x^2)^2}{(e^x + e^{2y})^2} dx^2 + \frac{12x e^{2y}}{e^x + e^{2y}} dx^2.$$

Пример 3. Найти дифференциал третьего порядка функции

$$z = 5x^2y - 4xy^3 + y^4 - 12.$$

Решение. Находим частные производные до третьего порядка включительно:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10xy - 4y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 - 12xy^2 + 4y^3;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 10y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10x - 12y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -24xy + 12y^2;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 10; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = -24y; \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = -24x + 24y.$$

Подставляя эти выражения в формулу дифференциала третьего порядка, имеем

$$d^3z = 30dx^2 dy - 72y dx dy^2 + 24(y - x) dy^3.$$

Упражнения

1. Найти d^2z функции $z = x^2y^2$.

Отв. $d^2z = 2y^2 dx^2 + 8xy dx dy + 2x^2 dy^2$.

2. Найти d^3z функции $z = \cos(x + 2y^2)$.

Отв. $d^3z = \sin(x + 2y^2) dx^3 + 12y \sin(x + 2y^2) dx^2 dy - [12 \cos(x + 2y^2) + 48y^2 \sin(x + 2y^2)] dx dy^2 - [48y \cos(x + 2y^2) + 64y^3 \sin(x + 2y^2)] dy^3$.

3. Найти d^2z функции $z = xy$.

Отв. $d^2z = 2dx dy$.

4. Найти d^2z функции $z = e^{x-y^2} + \cos x$.

Отв. $d^2z = (e^{x-y^2} - \cos x) dx^2 - 4ye^{x-y^2} dx dy + 2e^{x-y^2} (2y^2 - 1) dy^2$.

5. Найти d^2z функции $z = y \ln x$.

Отв. $d^2z = -\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy$.

§ 15. ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Геометрическое значение частных производных функций двух независимых переменных $z = f(x, y)$ дает возможность составить уравнение касательной плоскости к поверхности в данной точке $M(x; y; z)$.

Пусть уравнение касательной плоскости к поверхности в точке M имеет вид

$$AX + BY + CZ + D = 0, \quad (18.45)$$

где X, Y, Z — текущие координаты; A, B, C, D — неизвестные коэффициенты. Точка $M(x; y; z)$, как точка касания, должна лежать на касательной плоскости, а ее координаты должны удовлетворять уравнению

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (18.46)$$

Вычитая уравнение (18.45) из уравнения (18.46), исключим неизвестный коэффициент D , тогда

$$A(X - x) + B(Y - y) + C(Z - z) = 0,$$

откуда

$$Z - z = -\frac{A}{C}(X - x) - \frac{B}{C}(Y - y)$$

или, обозначая $-\frac{A}{C} = p$, $-\frac{B}{C} = q$, получим

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y). \quad (18.47)$$

Здесь X, Y, Z — текущие координаты; x, y, z — постоянные. Остается определить неизвестные коэффициенты p и q . Касательную плоскость пересечем плоскостью, параллельной координатной плоскости xOz и проходящей через точку $M(x; y; z)$, уравнение которой $Y = y$. Линия пересечения этих плоскостей определяется двумя уравнениями:

$$Z - z = p(X - x) \text{ и } Y = y.$$

Прямая, определяемая этими уравнениями, лежит в плоскости, параллельной плоскости xOz , и интерес представляет только ее направление, поэтому не принимается во внимание уравнение $Y = y$, т. е. прямая определяется уравнением

$$Z - z = p(X - x),$$

где p — угловой коэффициент. Угловой же коэффициент равен соответствующей частной производной

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично, пересекая плоскость, определяемую уравнением (18.47), плоскостью, параллельной плоскости yOz , уравнение которой $X = x$, находим

$$q = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Итак, уравнение касательной плоскости имеет вид

$$Z - z = \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y). \quad (18.48)$$

Перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания называется *нормалью* к поверхности. Уравнения нормали как прямой, проходящей через точку $M(x; y; z)$ и имеющей заданное направление, имеют вид

$$\frac{X-x}{\cos \alpha} = \frac{Y-y}{\cos \beta} = \frac{Z-z}{\cos \gamma}. \quad (18.49)$$

Приведем последнее уравнение к нормальному виду

$$\frac{p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z)}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = 0,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ и $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Следовательно, направляющие косинусы

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \cos \beta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \\ \cos \gamma &= -\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (18.50)$$

В уравнениях (18.49) заменим косинусы пропорциональными им величинами $p, q, -1$:

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}. \quad (18.51)$$

Это и есть уравнения нормали.

Пример. Написать уравнение плоскости, касательной к эллипсоиду

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

в точке $(x; y; z)$.

Решение. Находим частные производные:

$$\begin{aligned} \frac{2x}{4} + \frac{2z}{16} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \text{ откуда } \frac{\partial z}{\partial x} = -4 \frac{x}{z}; \\ \frac{2y}{9} + \frac{2z}{16} \frac{\partial z}{\partial y} &= 0, \text{ откуда } \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{16}{9} \frac{y}{z}. \end{aligned}$$

Составляем по формуле (18.48) уравнение касательной плоскости:

$$Z-z = -4 \frac{x}{z} (X-x) - \frac{16}{9} \frac{y}{z} (Y-y).$$

Переносим все члены в левую часть, разделим на 16 и умножим на z :

$$-\frac{1}{4} (X-x)x + \frac{1}{9} (Y-y)y + \frac{1}{16} (Z-z)z = 0$$

или

$$\frac{Xx}{4} + \frac{Yy}{9} + \frac{Zz}{16} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} \right) = 0.$$

Так как $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$, то уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\frac{Xx}{4} + \frac{Yy}{9} + \frac{Zz}{16} - 1 = 0.$$

Упражнения

1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к эллиптическому параболоиду $z = 2x^2 + y^2$ в точке $(1; -1; 3)$.

Отв. $4x - 2y - z - 3 = 0$ (касательная плоскость); $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ (нормаль).

Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхностям:

2. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ в точке $(1; -1; 1)$.

Отв. $x - 2y + 3z - 6 = 0$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{3}$.

3. $z = x^2 + y^2$ в точке $(1; 2; 5)$.

Отв. $2x - 4y - z - 5 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$.

4. $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 5$ в точке $(1; 2; 1)$.

Отв. $x + 4y - 4z = 5$; $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-1}{-4}$.

5. Написать уравнение касательной к кривой $x^2y + e^{xy^2} = 1$ в точке $(0; 1)$.

Отв. $x = 0$.

§ 16. РЯД ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть дана функция $z = F(x, y)$. Придадим переменной x приращение h , а переменной y приращение k . Поставим задачу разложить функцию $F(x+h, y+k)$ в ряд по степени приращений h и k . Зафиксируем x, y, h и k . Введем новую переменную t и составим функцию $z = F(x+ht, y+kt)$. Так как x, y, h и k зафиксированы, то они для этой функции являются параметрами (постоянными). Таким образом,

$$F(x+ht, y+kt) = f(t).$$

Изобразим процесс перехода от $z = F(x, y)$ к $f(t)$ геометрически. Так как $z = F(x, y)$ представляет уравнение поверхности, то при фиксированных $x, y, h, k, F(x, y)$ и $F(x+h, y+k)$ получаем две точки этой поверхности

$$A[x, y, F(x, y)] \text{ и } B[x+h, y+k, F(x+h, y+k)].$$

Тогда система уравнений

$$\left. \begin{aligned} X &= \alpha = x + ht = \varphi(t), \\ Y &= \beta = y + kt = \psi(t), \\ Z &= F(x + ht, y + kt) = F(\alpha, \beta) = f(t) \end{aligned} \right\}$$

представляет собой параметрические уравнения кривой, лежащей на поверхности $z = F(x, y)$ и проходящей через точки A и B . Таким образом, вводя новую переменную t , переходим от поверхности

к линии на ней. Приращения h и k можно выбрать любые. Изменяя h и k , получим совокупность линий, составляющих поверхность.

Для функции $f(t)$ ряд Маклорена имеет вид

$$f(t) = f(0) + \frac{t}{1!} f'(0) + \frac{t^2}{2!} f''(0) + \frac{t^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

Найдем производные $f(t)$, выраженные через x , y , h и k . Так как

$$\left. \begin{aligned} x + ht &= \alpha; \\ y + kt &= \beta, \end{aligned} \right\} \quad (18.52)$$

$$f(t) = F(\alpha, \beta) = F(x + ht, y + kt), \quad (18.53)$$

$$\text{то при } t=0 \text{ имеем } f(0) = F(x, y); \quad (18.54)$$

$$\text{при } t=1 \text{ имеем } f(1) = F(x + h, y + k). \quad (18.55)$$

Продифференцируем равенства (18.52) по независимой переменной t :

$$\left. \begin{aligned} d\alpha &= hdt; \\ d\beta &= kdt, \end{aligned} \right\} \quad (18.56)$$

$$\left. \begin{aligned} d^2\alpha &= 0; \\ d^2\beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18.57)$$

В силу равенств (18.57) дифференциал второго порядка функции $F(\alpha, \beta)$ и все остальные дифференциалы можно находить по формуле дифференциала функции двух независимых переменных. Запишем формулу дифференциала n -го порядка функции двух независимых переменных:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} d\beta \right)^n F(\alpha, \beta). \quad (18.58)$$

Так как в ряд Маклорена входят производные, то заменив $d\alpha$ и $d\beta$ в соответствии с соотношениями (18.56), можно вынести dt^n за скобки и разделить это равенство на вынесенный множитель. Имеем

$$\frac{d^n f}{dt^n} = \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} h + \frac{\partial}{\partial \beta} k \right)^n F(\alpha, \beta). \quad (18.59)$$

Подставив $t=0$, получаем

$$\left(\frac{d^n f}{dt^n} \right)_{t=0} = f^{(n)}(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n F(x, y) \quad (18.60)$$

(так как из равенств (18.52) при $t=0$ следует, что $\alpha=x$ и $\beta=y$). Итак,

$$\left. \begin{aligned} f'(0) &= \frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k, \\ f''(0) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2, \\ f'''(0) &= \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} k^3, \\ &\vdots \end{aligned} \right\} \quad (18.61)$$

Подставляем в ряд Маклорена значения $f(t)$, $f(0)$ и все ее производные при $t=0$. Окончательно получаем

$$F(x+ht, y+kt) = F(x, y) + \frac{t}{1!} \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k \right) + \\ + \frac{t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 \right) + \\ + \frac{t^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} k^3 \right) + \dots \quad (18.62)$$

Подставляем $t=1$ и в результате получаем ряд Тейлора для разложения функции двух независимых переменных по степеням приращений h и k :

$$F(x+h, y+k) = F(x, y) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} h + \frac{\partial F}{\partial y} k \right) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} k^2 \right) + \\ + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y^3} k^3 \right) + \dots \quad (18.63)$$

Аналогично, для функции трех независимых переменных имеем

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + \left(\frac{\partial f}{\partial x} h + \frac{\partial f}{\partial y} k + \frac{\partial f}{\partial z} l \right) + \\ + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} l^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} hk + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} hl + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} kl \right) + \dots + \sum_{v=1}^n \frac{1}{v!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^v f(x, y, z) + \dots \quad (18.64)$$

Ряд для функций нескольких независимых переменных можно записать в другом виде. Как известно, дифференциалы независимых переменных равны их приращениям; h , k и l в данном случае — это приращения независимых переменных, следовательно, их дифференциалы. Суммы, находящиеся в скобках равенства (18.64), являются полными дифференциалами соответствующего порядка функции $f(x, y, z)$. Поэтому ряд (18.64) можно записать так:

$$f(x+h, y+k, z+l) = f(x, y, z) + df + \\ + \frac{1}{2!} d^2 f + \frac{1}{3!} d^3 f + \dots + \frac{1}{n!} d^n f + \dots \quad (18.65)$$

Формула Тейлора для функции двух переменных может быть представлена в виде суммы многочлена n -го порядка по степеням $(x-a)$ и $(y-b)$.

Пусть функция двух переменных $z = F(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными до $(n+1)$ -го порядка включительно в некоторой окрестности точки $M(a; b)$. Применим формулу Тейлора для функции $F(x, y)$, считая x постоянным, а y переменным, т. е. как для функции одного переменного. Ограничимся чле-

нами второго порядка, тогда

$$F(x, y) = F(x, b) + \frac{y-b}{1} F'_y(x, b) + \frac{(y-b)^2}{1.2} F''_{yy}(x, b) + \frac{(y-b)^3}{1.2.3} F'''_{yyy}(x, \eta_1), \quad (18.66)$$

где $\eta_1 = b + \lambda_1(y-b)$, $0 < \lambda_1 < 1$. Разложим функции $F(x, b)$, $F'_y(x, b)$, $F''_{yy}(x, b)$ по формуле Тейлора по степеням $(x-a)$. При этом ограничимся смешанными производными третьего порядка. Имеем

$$F(x, b) = F(a, b) + \frac{x-a}{1} F'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''_{xx}(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} F'''_{xxx}(\xi_1, b), \quad (18.67)$$

где $\xi_1 = x + \lambda_2(x-a)$, $0 < \lambda_2 < 1$;

$$F'_y(x, b) = F'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} F'_{yx}(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F'''_{yxx}(\xi_2, b), \quad (18.68)$$

где $\xi_2 = x + \lambda_3(x-a)$, $0 < \lambda_3 < 1$;

$$F''_{yy}(x, b) = F''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} F'''_{yyx}(\xi_3, b), \quad (18.69)$$

где $\xi_3 = x + \lambda_4(x-a)$, $0 < \lambda_4 < 1$.

В результате подстановки соотношений (18.67), (18.68) и (18.69) в равенство (18.66) получим

$$\begin{aligned} F(x, y) = & F(a, b) + \frac{x-a}{1} F'_x(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} F''_{xx}(a, b) + \\ & + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} F'''_{xxx}(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1} \left[F'_y(a, b) + \frac{x-a}{1} F''_{yx}(a, b) + \right. \\ & + \left. \frac{(x-a)^2}{1.2} F'''_{yxx}(\xi_2, b) \right] + \frac{(y-b)^2}{1.2} \left[F''_{yy}(a, b) + \frac{x-a}{1} F'''_{yyx}(\xi_3, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^3}{1.2.3} F'''_{yyy}(x, \eta). \end{aligned} \quad (18.70)$$

Применяя другие обозначения частных производных и группируя их в порядке возрастания, получаем раскрытую формулу Тейлора для функции двух независимых переменных:

$$\begin{aligned} F(x, y) = & F(a, b) + \frac{x-a}{1} \frac{\partial}{\partial x} F(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(a, b) + \\ & + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} \frac{\partial^3}{\partial x^3} F(\xi_1, b) + \frac{y-b}{1} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(a, b) + \frac{x-a}{1} \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F(a, b) + \right. \\ & + \left. \frac{(x-a)^2}{1.2} \frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2} F(\xi_2, b) \right] + \frac{(y-b)^2}{1.2} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(a, b) + \frac{x-a}{1} \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} F(\xi_3, b) \right] + \\ & + \frac{(y-b)^3}{1.2.3} \frac{\partial^3}{\partial y^3} F(x, \eta) = F(a, b) + \frac{1}{1!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] F(a, b) + \\ & + \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 F(a, b) + R_2, \end{aligned} \quad (18.71)$$

где остаточный член

$$\begin{aligned} R_2 = & \frac{1}{3!} \left[(x-a)^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} F(\xi_1, b) + 3(x-a)^2(y-b) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} F(\xi_2, b) + \right. \\ & + \left. 3(x-a)(y-b)^2 \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} F(\xi_3, b) + (y-b)^3 \frac{\partial^3}{\partial y^3} F(x, \eta) \right]. \end{aligned}$$

Пример. Разложить в ряд Тейлора по степеням h и k функцию $f(x, y) = e^x \sin y$, ограничиваясь членами третьего порядка.

Решение. Находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \sin y; & \frac{\partial f}{\partial y} &= e^x \cos y; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = e^x \sin y; \\ & & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = e^x \cos y; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -e^x \sin y; & \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} &= -e^x \cos y.\end{aligned}$$

Разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\begin{aligned}e^{x+h} \sin(y+k) &= e^x \sin y + (e^x \sin y \cdot h + e^x \cos y \cdot k) + \\ &+ \frac{1}{2!} (e^x \sin y \cdot h^2 + 2e^x \cos y \cdot hk - e^x \sin y \cdot k^2) + \\ &+ \frac{1}{3!} (e^x \sin y \cdot h^3 + 3e^x \cos y \cdot h^2 k - 3e^x \sin y \cdot h k^2 - e^x \cos y \cdot k^3) + \dots\end{aligned}$$

Упражнения

1. Разложить (по формуле 18.63) в ряд Тейлора по степеням h и k функцию $F(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Отв. $F(x+h, y+k) = x^2 + xy + y^2 + h(2x+y) + k(2y+x) + h^2 + hk + k^2$.

2. Разложить (по формуле 18.71) функцию $F(x, y) = x^3 + 2xy^2$ по степеням $(x-1)$ и $(y-2)$.

Отв. $x^3 + 2xy^2 = 9 + 11(x-1) + 8(y-2) + 3(x-1)^2 + 8(x-1)(y-2) + + 2(y-2)^2 + (x-1)^3 + 2(x-1)(y-2)^2$.

3. Разложить функцию $F(x, y) = x^2 y$ по степеням $(x-1)$ и $(y+1)$.

Отв. $x^2 y = -1 - 2(x-1) + (y+1) - (x-1)^2 + (x-1)(y+1)$.

4. Функцию $F(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $A(1; -2)$.

Отв. $F(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1)(y+2) - (y+2)^2$.

5. Функцию трех переменных $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 - 3xyz$ разложить по формуле Тейлора (18.64) в окрестности точки $A(1; 1; 1)$.

Отв. $F(x, y, z) = 3[(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) - - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1)$.

§ 17. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО И НАИМЕНЬШЕГО ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

Непрерывная функция $z = f(x, y)$ с непрерывными частными производными имеет *максимум (минимум)* при $x = x_1$ и $y = y_1$, если при любых x и y , близких к x_1 и y_1 , значение функции $f(x_1, y_1)$ больше (меньше) $f(x, y)$. Иначе, функция $z = f(x, y)$ имеет максимум при $x = x_1$ и $y = y_1$, если при любых бесконечно малых h и k имеет место неравенство

$$f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1) < 0.$$

Функция $z = f(x, y)$ имеет минимум при $x = x_1$ и $y = y_1$, если при любых бесконечно малых h и k выполняется неравенство

$$f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1) > 0.$$

На рис. 18.8 аппликата точки M больше аппликат соседних с ней точек. Аппликата точки M_1 меньше аппликат точек, соседних с ней. На рис. 18.9 некоторые точки, соседние с точкой M_2 , расположены выше ее, а другие ниже. При различных значениях h и k разность $f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1)$ имеет разные знаки. Экстремума в этой точке нет.

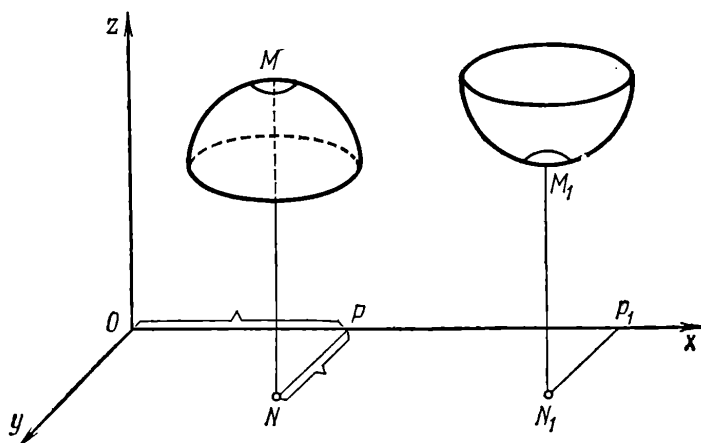


Рис. 18.8

Необходимое условие существования экстремума функции двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум при $x = x_1$ и $y = y_1$. Из определения экстремума следует, что разность

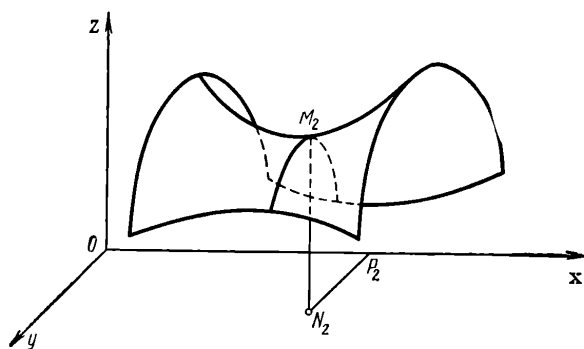


Рис. 18.9

$f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1)$ должна сохранять знак при любых h и k . В случае максимума разность должна быть отрицательна, а в случае минимума — положительна. Воспользуемся разложением функции $f(x_1 + h, y_1 + k)$ в ряд по степеням h и k :

$$\begin{aligned} f(x_1 + h, y_1 + k) = & f(x_1, y_1) + [f'_x(x_1, y_1)h + f'_y(x_1, y_1)k] + \\ & + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_1, y_1)h^2 + 2f''_{xy}(x_1, y_1)hk + f''_{yy}(x_1, y_1)k^2] + \\ & + \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(x_1, y_1)h^3 + 3f'''_{xxy}(x_1, y_1)h^2k + \dots] + \dots \quad (18.72) \end{aligned}$$

Так как функция и ее производные непрерывны в области точки, то они в ней ограничены. Если принять h и k за бесконечно малые первого порядка, то сумма, находящаяся в первой скобке последнего равенства, является величиной бесконечно малой первого порядка, во второй скобке — бесконечно малой второго порядка, а в третьей — третьего порядка малости и т. д. Перенесем $f(x_1, y_1)$ в левую часть равенства:

$$\begin{aligned} f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1) &= [f'_x(x_1, y_1)h + f'_y(x_1, y_1)k] + \\ &+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_1, y_1)h^2 + 2f''_{xy}(x_1, y_1)hk + f''_{yy}(x_1, y_1)k^2] + \\ &+ \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(x_1, y_1)h^3 + 3f'''_{xxy}(x_1, y_1)h^2k + \dots] + \dots \quad (18.73) \end{aligned}$$

Правая часть этого равенства представляет собой сумму бесконечно малых величин, а каждая из последующих скобок — бесконечно малую более высокого порядка малости чем предыдущая. Знак всей суммы, следовательно, и знак разности $\Delta z = f(x_1 + h, y_1 + k) - f(x_1, y_1)$ зависит от знака бесконечно малой более низкого порядка малости. Знак Δz будет меняться, если не равны нулю $f'_x(x_1, y_1)$ и $f'_y(x_1, y_1)$. Достаточно положить $k = 0$ и смена знака h повлечет за собой смену знака Δz . Отсюда следует, что *необходимым условием существования экстремума функции двух независимых переменных является равенство нулю первых частных производных от $z = f(x, y)$, т. е.*

$$f'_x(x_1, y_1) = 0 \quad \text{и} \quad f'_y(x_1, y_1) = 0.$$

Для функций нескольких переменных необходимым условием является равенство нулю всех частных производных первого порядка. При выполнении этого условия знак разности определяется знаком дифференциала второго порядка.

Достаточное условие существования экстремума функции двух переменных. Сохранение знака дифференциала второго порядка при любых приращениях независимых переменных является *достаточным условием существования экстремума*.

Для функции двух независимых переменных достаточное условие можно получить проще. Введем следующие обозначения:

$$f''_{xx}(x_1, y_1) = A; \quad f''_{xy}(x_1, y_1) = B; \quad f''_{yy}(x_1, y_1) = C. \quad (18.74)$$

Тогда

$$d^2f = f''_{xx}(x_1, y_1)h^2 + 2f''_{xy}(x_1, y_1)hk + f''_{yy}(x_1, y_1)k^2 = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2. \quad (18.75)$$

Умножим и разделим это выражение на A :

$$\frac{1}{A} [A^2h^2 + 2ABhk + ACK^2]. \quad (18.76)$$

Выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} [A^2h^2 + 2ABhk + B^2k^2 + ACK^2 - B^2k^2] = \\ = \frac{1}{A} [(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2]. \quad (18.77) \end{aligned}$$

Величина $AC - B^2 = \Delta$ называется *дискриминантом*.

Исследуем выражение (18.77), в котором $(Ah + Bk)^2$ всегда больше нуля, а k^2 положительно.

Пусть $AC - B^2 > 0$, тогда $(Ah + Bk)^2 + (AC - B^2)k^2 > 0$. Знак второго дифференциала при любых значениях h и k совпадает со знаком A . Если Δz при любых значениях h и k сохраняет знак, то $f(x_1, y_1)$ имеет экстремум. При этом если $A < 0$, то $f(x_1, y_1)$ — максимум; если же $A > 0$, то $f(x_1, y_1)$ — минимум.

Так как $AC - B^2 > 0$, то $AC > B^2$. Следовательно, знаки A и C совпадают и вид экстремума можно определить также и по знаку C .

Пусть $AC - B^2 < 0$. Тогда при различных h и k знак Δz будет меняться. Так, если $k = 0$, $h \neq 0$, то выражение в квадратных скобках равенства (18.77) положительное. Если $h = 0$, а $k \neq 0$, то сумма отрицательна в случае, когда $AC < 0$, т. е. C и A имеют различные знаки.

Пусть $AC - B^2 = 0$. Тогда знак Δz совпадает со знаком A при всех значениях h и k , за исключением тех, при которых $Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 = 0$, так как тогда знак разности определяется знаком следующих членов ряда (18.73). Знак разности может оказаться и противоположным знаку A .

Итак, достаточным условием существования экстремума функции двух независимых переменных является выполнение неравенства $\Delta = AC - B^2 > 0$. В случае $AC - B^2 < 0$ экстремума нет. Если же $AC - B^2 = 0$, то имеем неопределенный случай.

Правило исследования на экстремум функции двух переменных.

1. Находим частные производные первого порядка.
2. Приравниваем их нулю, решаем систему уравнений и определяем критические значения.
3. Находим частные производные второго порядка.
4. Составляем дискриминант

$$\Delta = AC - B^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

5. Исследуем знак дискриминанта при найденных критических значениях:

если $\Delta > 0$, то экстремум есть;
 если $\Delta < 0$, то экстремума нет;
 если $\Delta = 0$, то неопределенный случай.

6. Определяем вид экстремума для тех значений, при которых $\Delta > 0$:

если $\Delta > 0$ и $A < 0$, то $f(x_1, y_1)$ — максимум,
 если $\Delta > 0$ и $A > 0$, то $f(x_1, y_1)$ — минимум.

7. Находим максимум или минимум функции. Для этого в данную функцию подставляем x_1 , y_1 и вычисляем ее числовое значение.

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3x^2; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 3y^2.$$

Составляем систему уравнений

$$\begin{aligned}y - x^2 &= 0; \\ x - y^2 &= 0,\end{aligned}$$

откуда

$$y = x^2; \quad x - x^4 = 0; \quad x(1 - x^3) = 0.$$

Действительные корни $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, остальные корни комплексные.

Определяем значения y_1 и y_2 , после чего находим две пары критических значений:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 1.$$

Частные производные второго порядка

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6x; \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3; \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

Составим дискриминант

$$\Delta = AC - B^2 = 36xy - 9 = 9(4xy - 1).$$

Определяем знак дискриминанта при найденных парах критических значений:

$\Delta_1 = -1 < 0$ — экстремума нет;

$\Delta_2 = 4 - 1 > 0$ — экстремум есть, так как выполняется достаточное условие существования экстремума.

Определяем вид экстремума при $x_2 = 1$ и $y_2 = 1$: $A = -6 < 0$. Следовательно, $f(1, 1)$ — максимум. Находим этот максимум: $z_{\max} = f(1, 1) = 3 - 1 - 1 = 1$.

Пример 2. Найти размеры прямоугольного бассейна объема V , на облицовку которого нужно затратить минимум материала.

Решение. Пусть x — ширина дна, y — длина дна. Тогда высота бассейна равна $\frac{V}{xy}$. Площадь дна и всех четырех стен

$$S = xy + 2\frac{V}{y} + 2\frac{V}{x}.$$

Исследуем эту функцию на экстремум. Находим частные производные

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{2V}{x^2}; \quad \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{2V}{y^2},$$

и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned}x^2 y - 2V &= 0; \\ xy^2 - 2V &= 0.\end{aligned}$$

Вычитаем из первого уравнения второе:

$$x^2 y - xy^2 = xy(x - y) = 0.$$

Так как x и y не могут равняться нулю (по смыслу задачи), то $x - y = 0$, или $x = y$. Подставляя это значение в выражения частных производных, имеем $x^3 = 2V$, откуда $x = y = \sqrt[3]{2V}$.

По условию задачи полученная функция обязательно должна иметь минимум, а так как задаче удовлетворяет только одна пара критических значений, то при $x = y = \sqrt[3]{2V}$ функция имеет минимум; высота бассейна

$$h = \frac{V}{xy} = \frac{V}{\sqrt[3]{4V^2}} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}.$$

Итак, наиболее экономичные размеры имеет бассейн с квадратным основанием и высотой, равной половине стороны основания.

Упражнения

Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $z = (x-1)^2 + 2y^2$.

Отв. $z_{\min} = 0$ в точке $(1; 0)$.

2. $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

Отв. $z_{\min} = 422,25$ в точке $(17/2; -11/2)$.

3. $z = 2x^3 - x^2 + xy^2 - 4x + 3$.

Отв. $z_{\max} = 3\frac{26}{27}$ в точке $(-\frac{2}{3}; 0)$;

$z_{\min} = 0$ в точке $(1; 0)$.

4. $z = x^3 - 3axy + y^3$.

Отв. $z_{\max} = -a^3$ в точке $(a; a)$.

5. $z = 2x^3 + 2y^3 - 36xy + 430$.

Отв. В точке $(6; 6)$ функция имеет минимум ($z_{\min} = -2$). В точке $(0; 0)$ функция не имеет ни максимума, ни минимума.

6. $z = 3 \ln \frac{x}{6} + 2 \ln y + \ln(12 - x - y)$.

Отв. $z_{\max} = 5 \ln 2$ в точке $(6; 4)$.

7. Найти размеры прямоугольника данного периметра 2ρ , в результате вращения которого вокруг одной из сторон образуется тело наибольшего объема.

Отв. $V_{\max} = \frac{4}{27} \pi \rho^3$ при $x = \frac{2\rho}{3}$, $y = \frac{\rho}{3}$.

8. Найти экстремум функции

$$z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Отв. $z_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ в точке $(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$.

§ 1. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим цилиндрическое тело, расположенное над плоскостью xOy , ограниченное снизу конечной частью плоскости xOy , сбоку — цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными

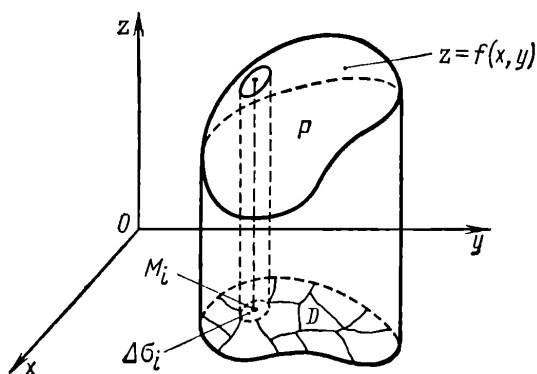


Рис. 19.1

оси Oz и сверху — поверхностью P , уравнение которой $z = f(x, y)$. Предположим, что любая прямая, параллельная Oz , пересекает поверхность P не более чем в одной точке, и что функция $f(x, y)$ непрерывна в области D (рис. 19.1). Определим объем этого цилиндрического тела. Разобьем произвольным образом область D на n элементарных площадок с площа-

дами $\Delta\sigma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Границы каждой элементарной области примем за направляющие и проведем через них цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Oz . Этим все цилиндрическое тело разобьется на n элементарных цилиндрических тел, объем каждого из которых ввиду малости приближенно можно считать равным объему прямого цилиндра, площадь основания которого равна площади соответствующего элементарного цилиндрического тела, и высотой, равной произвольной его аппликате. Иначе, если в каждой из элементарных областей произвольно выбрать по точке $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $\dots$, $M_n(x_n; y_n)$, то высоты элементарных цилиндров $z_1 = f(M_1) = f(x_1, y_1)$, $z_2 = f(M_2) = f(x_2, y_2)$, $\dots$, $z_n = f(M_n) = f(x_n, y_n)$, а объемы этих элементарных цилиндров

$$\Delta V_1 \approx f(M_1) \Delta\sigma_1, \Delta V_2 \approx f(M_2) \Delta\sigma_2, \dots, \Delta V_n \approx f(M_n) \Delta\sigma_n.$$

Объем всего цилиндрического тела

$$V \approx \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i. \quad (19.1)$$

Под *диаметром* элементарной области будем понимать наибольшую из ее хорд. Очевидно, что соотношение (19.1) тем точнее выражает

действительный объем тела, чем меньше наибольший из диаметров d элементарных областей и чем больше число n этих областей. Если устремить d к нулю (т. е. число элементарных областей n к бесконечности), то в пределе соотношение (19.1) даст действительный объем цилиндрического тела:

$$V = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i. \quad (19.2)$$

Пусть в некоторой области D задана непрерывная функция $z = f(x, y)$, принимающая в этой области значения любого знака. Разобьем область D произвольным образом на n элементарных областей с площадями $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ и в каждой из них произвольно выберем по одной точке $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$. Значения функции $z = f(x, y)$ в этих точках

$$f(M_1) = f(x_1, y_1), f(M_2) = f(x_2, y_2), \dots, f(M_n) = f(x_n, y_n).$$

Далее вычислим произведения $f(M_i) \Delta \sigma_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$, а затем их просуммируем, т. е. найдем сумму

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i.$$

Величина этой суммы зависит от способа разбиения области D и положения точек M_i . Полученная сумма называется *двумерной интегральной суммой* функции $f(x, y)$ в области D .

Предел двумерной интегральной суммы функции $f(M) = f(x, y)$ в области D , не зависящий от способа разбиения D на элементарные области и выбора точек в этих областях, при неограниченном увеличении числа элементарных областей и неограниченном уменьшении наибольшего из их диаметров называется *двойным интегралом* от функции $f(M)$ по области D и обозначается

$$\iint_D f(M) d\sigma = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i. \quad (19.3)$$

Здесь область интегрирования — плоская (двумерная); функция $f(M)$ — функция двух переменных, а двойной интеграл — число.

Сравнивая равенства (19.2) и (19.3), видим, что объем цилиндрического тела, расположенного над плоскостью xOy ,

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma, \quad (19.4)$$

где D — проекция тела на плоскость xOy , а $z = f(x, y)$ — уравнение поверхности, ограничивающей цилиндрическое тело.

§ 2. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА ОТ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Двойной интеграл не всегда имеет смысл, так как двойные интегральные суммы одной и той же функции $f(M) = f(x, y)$, соответствующие одной и той же области D , но составленные различными способами, могут иметь разные пределы или вообще их не иметь, если на функцию $f(M) = f(x, y)$ и на область D не наложено ограничений. Однако для двойного интеграла доказана следующая теорема существования.

Теорема. Если функция $f(M) = f(x, y)$ непрерывна и область D конечна, то двумерная интегральная сумма непрерывной функции $f(M) = f(x, y)$ в области D при неограниченном увеличении числа элементарных областей $\Delta\sigma_i$ и неограниченном уменьшении наибольшего из их диаметров стремится к определенному пределу, т. е. в этом случае двойной интеграл существует.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением таких подынтегральных функций и областей интегрирования, для которых выполняются условия этой теоремы.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть дана поверхность $z = f(M) = f(x, y)$, где $f(M) = f(x, y)$ — функция, непрерывная в области D , причем любая прямая, параллельная оси Oz , пересекается с этой поверхностью не более чем в одной точке. Тело, ограниченное поверхностью $z = f(M) = f(x, y)$, плоскостью xOy

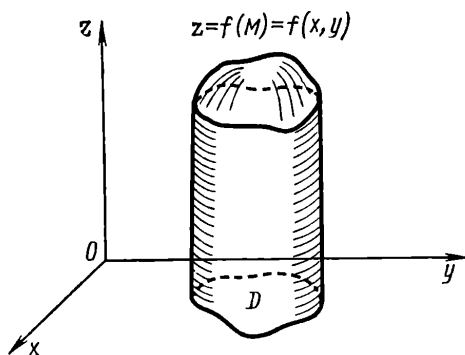


Рис. 19.2

и цилиндрической поверхностью, у которой направляющей является контур области D , а образующие параллельны Oz , будем называть цилиндром (рис. 19.2). Если считать подынтегральную функцию аппликатой поверхности $z = f(M) = f(x, y)$ в точке M_i , то произведение $f(M_i) \Delta\sigma_i$ равно объему элементарного цилиндра с основанием $\Delta\sigma_i$ и высотой $f(M_i)$. Интегральная сумма $\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i$ геометрически выразит объем ступенчатого цилиндрида, а двойной интеграл $\iint_D f(M) d\sigma = \iint_D z d\sigma$ численно равен точному объему цилиндрида. Если $f(M) = 1$, то двойной интеграл $\iint_D d\sigma$ выражает площадь S_D области интегрирования D :

$$\iint_D d\sigma = S_D.$$

Пусть теперь D — неоднородная плоская материальная пластинка с переменной плотностью $\delta(M) = \delta(x, y)$. Разобьем ее на n площадок и будем считать плотность i -й элементарной площадки (ввиду ее малости) постоянной и равной значению плотности в точке M_i . Тогда, если считать подынтегральную функцию переменной плотностью пластинки $\delta(M) = f(M) = f(x, y)$, то произведение $\delta(M_i) \Delta\sigma_i$ равно массе элементарной площадки. Интегральная сумма $\sum_{i=1}^n \delta(M_i) \Delta\sigma_i$ выразит приближенно, а двойной интеграл $\iint_D \delta(M) d\sigma$ — точно массу M_D пластинки D :

$$\iint_D \delta(M) d\sigma = M_D.$$

§ 4. СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Свойство 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т. е. если $c = \text{const}$ — некоторое число, то*

$$\iint_D cf(M) d\sigma = c \iint_D f(M) d\sigma.$$

Доказательство. Согласно определению двойного интеграла

$$\begin{aligned} \iint_D cf(M) d\sigma &= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n cf(M_i) \Delta\sigma_i = c \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta\sigma_i = \\ &= c \iint_D f(M) d\sigma, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2. *Двойной интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме двойных интегралов этих функций.*

Доказательство. Применяя к двойному интегралу, у которого подынтегральная функция представляет собой алгебраическую сумму S функций, соотношения, вытекающие из определения двойного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} &\iint_D [f_1(M) \pm f_2(M) \pm \dots \pm f_S(M)] d\sigma = \\ &= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n [f_1(M_i) \pm f_2(M_i) \pm \dots \pm f_S(M_i)] \Delta\sigma_i = \\ &= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f_1(M_i) \Delta\sigma_i \pm \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f_2(M_i) \Delta\sigma_i \pm \dots \pm \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f_S(M_i) \Delta\sigma_i = \\ &= \iint_D f_1(M) d\sigma \pm \iint_D f_2(M) d\sigma \pm \dots \pm \iint_D f_S(M) d\sigma, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3. Если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знак, то двойной интеграл есть число того же знака, что и подынтегральная функция.

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(M)$, не меняющую знак в области D . Пусть $f(M) \geq 0$. Тогда двумерная интегральная сумма функции в области D

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i$$

также неотрицательна, так как все слагаемые суммы неотрицательны. Согласно предположению, в точках $M_1, M_2, \dots, M_n$ функция неотрицательна, а площади всех элементарных областей положительны. Переходя к пределу, получаем

$$\lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i > 0 \quad \text{или} \quad \iint_D f(M) d\sigma > 0.$$

Аналогично, если в области D функция $f(M) \leq 0$, то

$$\iint_D f(M) d\sigma < 0.$$

Свойство 4. Если область интегрирования разбита на несколько частей, то двойной интеграл по всей области равен сумме двойных интегралов по этим ее частям.

Доказательство. Пусть область интегрирования D разбита на части $D_1, D_2, \dots, D_S$. При составлении интегральной суммы в области D разобьем ее на частичные области так, чтобы каждая из них полностью лежала в одной из частей $D_1, D_2, \dots, D_S$. Тогда интегральную сумму в области D можно представить как сумму S интегральных сумм, соответствующих областям $D_1, D_2, \dots, D_S$:

$$\sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta \sigma_i = \sum_1 f(M_i) \Delta \sigma_i + \sum_2 f(M_i) \Delta \sigma_i + \dots + \sum_S f(M_i) \Delta \sigma_i.$$

Переходя к пределу и устремляя максимальный диаметр частичных областей к нулю, получим

$$\iint_D f(M) d\sigma = \iint_{D_1} f(M) d\sigma + \iint_{D_2} f(M) d\sigma + \dots + \iint_{D_S} f(M) d\sigma.$$

Свойство 5. Функциональные неравенства можно интегрировать почленно.

Пусть в области σ заданы две непрерывные функции $f(M)$ и $\varphi(M)$, причем $f(M) \geq \varphi(M)$. Тогда

$$\iint_{\sigma} f(M) d\sigma \geq \iint_{\sigma} \varphi(M) d\sigma.$$

Это свойство очевидно, если оба интеграла рассматривать как объемы цилиндрондов с соответствующими аппликатами.

Свойство 6. Если m и $\bar{M}$ соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(M)$ в области D , а S — площадь области D , то имеет место оценка

$$mS \leq \iint_D f(M) d\sigma \leq \bar{M}S.$$

Доказательство. Если $\bar{M}$ наибольшее значение функции $f(M)$ в области D , то в области D разность $\bar{M} - f(M) \geq 0$ и, согласно свойству 3,

$$\iint_D [\bar{M} - f(M)] d\sigma \geq 0$$

или (учитывая свойства 2 и 1)

$$\bar{M} \iint_D d\sigma - \iint_D f(M) d\sigma \geq 0.$$

Двойной интеграл $\iint_D d\sigma$, согласно определению, представляет собой предел суммы площадей частичных областей, который совпадает с площадью S всей области, следовательно,

$$\bar{M}S - \iint_D f(M) d\sigma \geq 0 \quad \text{или} \quad \iint_D f(M) d\sigma \leq \bar{M}S.$$

Аналогично доказывается, что

$$\iint_D f(M) d\sigma \geq mS.$$

Если $f(M) > 0$, то неравенствам свойства 6 можно придать геометрический смысл. Так как двойной интеграл $\iint_D f(M) d\sigma$ численно

равен объему цилиндрического тела, а величины mS и $\bar{M}S$ можно рассматривать как объемы прямых цилиндров с площадью основания S и высотами m и $\bar{M}$ соответственно, то неравенства показывают, что объем цилиндрического тела (цилиндроида) заключен между объемами двух прямых цилиндров, имеющих одинаковое с этим телом основание D и высоты, равные наименьшему m и наибольшему $\bar{M}$ значениям аппликат поверхности P , ограничивающей сверху цилиндрическое тело. Это свойство дает оценку двойного интеграла.

Свойство 7 (теорема о среднем). Двойной интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой средней точке области интегрирования на площадь этой области.

Доказательство. Из неравенств свойства 6 имеем

$$m \leq \frac{1}{S} \iint_D f(M) d\sigma \leq \bar{M}.$$

Отсюда следует, что значение $\frac{1}{S} \iint_D f(M) d\sigma$ заключено между наименьшим m и наибольшим $\bar{M}$ значениями, которые принимает непрерывная функция $f(M)$ в замкнутой области D . Поэтому в области D найдется, по крайней мере, одна точка $M_0(x; y)$, в которой

$$f(M_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(M) d\sigma,$$

откуда следует равенство

$$\iint_D f(M) d\sigma = f(M_0) S,$$

что и требовалось доказать. Значение $f(M_0)$ называется *средним значением функции $f(M)$ в области D* .

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Метод вычисления двойного интеграла зависит от выбора системы координат. Поскольку способ разбиения области D произволен, то для удобства вычислений ее разбивают на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$ сетью координатных линий.

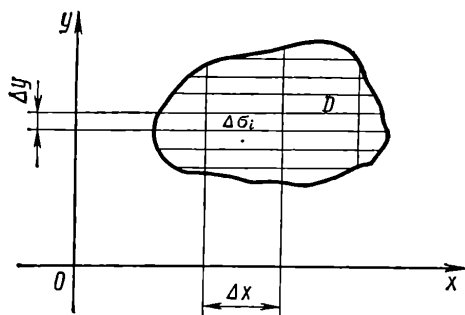


Рис. 19.3

Координатной линией в плоской системе координат называется линия, при перемещении по которой одна из двух координат остается неизменной. В декартовой прямоугольной системе координат координатными линиями являются прямые, параллельные осям Ox и Oy . Так как разбиение произвольно, то можно сделать координатные линии равноотстоя-

щими друг от друга. Тогда все элементарные площадки (кроме примыкающих к границе области D) окажутся равными прямоугольниками (рис. 19.3) и площадь $\Delta\sigma_i$ элементарной площадки, заключенной между двумя парами бесконечно близких координатных линий,

$$\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i.$$

1. Случай прямоугольной области интегрирования. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$, где D — прямоугольник, ограниченный прямыми, параллельными осям Ox и Oy , т. е. область D определяется неравенствами $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Разобьем область интегрирования D на прямоугольные частичные области прямыми, параллельными осям Ox и Oy , с площадями $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ или $d\sigma = dx dy$.

Рассмотрим случай, когда в области D подынтегральная функция $f(x, y) \geq 0$. Как известно, объем цилиндрического тела

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (19.5)$$

Вычислим этот объем другим способом. Рассечем цилиндрическое тело плоскостью, параллельной плоскости yOz (рис. 19.4). В сечении имеем криволинейную трапецию $EFF'E'$, ограниченную плоской кривой L , описываемой уравнениями

$$\left. \begin{aligned} z &= f(x, y), \\ x &= \text{const.} \end{aligned} \right\}$$

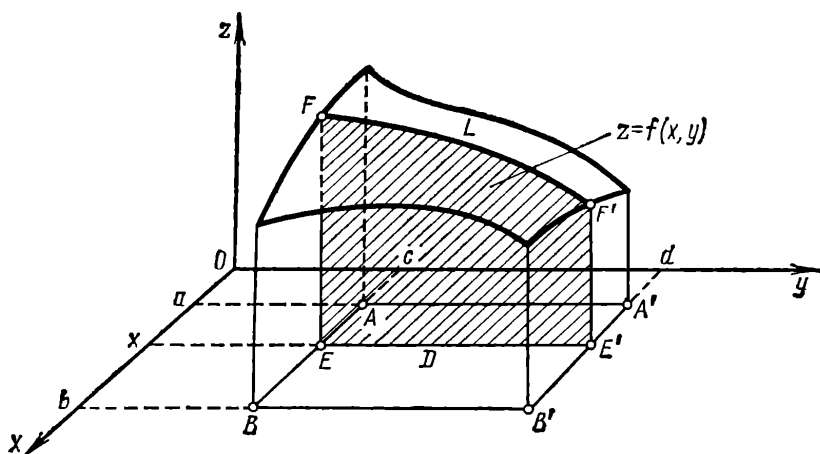


Рис. 19.4

Площадь сечения зависит от того, на каком расстоянии от плоскости yOz проведено сечение, т. е. является функцией x , и равна

$$S(x) = \int_c^d f(x, y) dy. \quad (19.6)$$

По сечению $S(x)$ плоскостью, перпендикулярной оси Ox (на рис. 19.4 заштриховано), объем тела, абсциссы точек которого меняются от a до b , находится следующим образом:

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (19.7)$$

Запишем правую часть этого равенства в виде двукратного интеграла;

$$V = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (19.8)$$

Приравнявая выражения (19.5) и (19.8), имеем

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (19.9)$$

Формула (19.9) позволяет выразить двойной интеграл через двукратные интегралы.

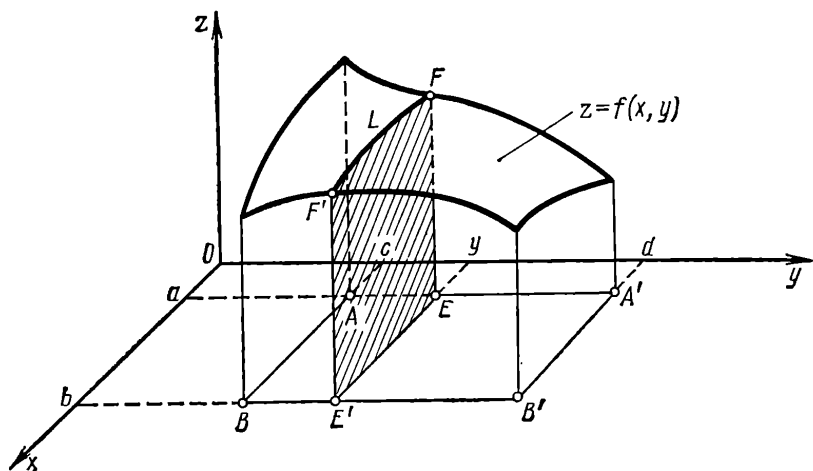


Рис. 19.5

Аналогично, если пересечь цилиндрическое тело плоскостью, параллельной плоскости xOz (рис. 19.5), то площадь сечения $E'F'FEE'$, представляющего собой криволинейную трапецию, ограниченную линией L , описываемой уравнениями

$$\left. \begin{aligned} z &= f(x, y); \\ y &= \text{const}, \end{aligned} \right\}$$

равна

$$S(y) = \int_a^b f(x, y) dx.$$

Объем цилиндрического тела

$$V = \int_c^d S(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (19.10)$$

Приравнявая выражения (19.5) и (19.10), имеем

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad (19.11)$$

Формула (19.11) также позволяет выразить двойной интеграл через двукратные интегралы.

Пусть $f(x, y)$ в области D меняет знак. Прибавим к $f(x, y)$ такое положительное число ϵ , чтобы в области D выполнялось условие $\epsilon + f(x, y) \geq 0$. Учитывая свойства 1 и 2 двойного интеграла, получим

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D [(\epsilon + f(x, y)) - \epsilon] d\sigma = \\ &= \iint_D [\epsilon + f(x, y)] d\sigma - \epsilon \iint_D d\sigma. \end{aligned} \quad (19.12)$$

Для двойного интеграла $\iint_D [\epsilon + f(x, y)] d\sigma$ справедливы равенства (19.9) и (19.11):

$$\iint_D [\epsilon + f(x, y)] d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d [\epsilon + f(x, y)] dy. \quad (19.13)$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\int_c^d [\epsilon + f(x, y)] dy = \epsilon y \Big|_c^d + \int_c^d f(x, y) dy = \epsilon(d - c) + \int_c^d f(x, y) dy.$$

Подставляя полученный результат в равенство (19.13) и используя свойства определенного интеграла, имеем

$$\begin{aligned} \iint_D [\epsilon + f(x, y)] d\sigma &= \epsilon(d - c) \int_a^b dx + \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \epsilon(b - a)(d - c) + \\ &+ \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Произведение $(b - a)(d - c)$ равно площади S области D , поэтому

$$\iint_D [\epsilon + f(x, y)] d\sigma = \epsilon S + \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (19.14)$$

По свойству 5

$$\iint_D d\sigma = S. \quad (19.15)$$

Подставляя выражения (19.14) и (19.15) в равенство (19.12), получим соотношение (19.9), справедливое для функции $f(x, y)$, которая принимает в области D значения любого знака. Подобным же образом для этой функции выводится формула (19.11).

Соотношения (19.9) и (19.11) позволяют вычислить двойной интеграл для прямоугольной области интегрирования.

Пример. Вычислить $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, если область интегрирования D определяется неравенствами $-1 \leq x \leq 2$; $0 \leq y \leq 1$.

Решение. Вычислим данный интеграл по формуле (19.9):

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = \int_{-1}^2 dx \int_0^1 (x^2 - y) dy. \quad (*)$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\int_0^1 (x^2 - y) dy = \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = x^2 - \frac{1}{2}.$$

Подставляя это значение в равенство (*), получим

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_{-1}^2 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{2} \right]_{-1}^2 = \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

По формуле (19.11) имеем

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-1}^2 (x^2 - y) dx,$$

где

$$\int_{-1}^2 (x^2 - y) dx = \left[\frac{x^3}{3} - xy \right]_{x=-1}^{x=2} = \frac{8}{3} - 2y + \frac{1}{3} - y = 3(1 - y).$$

Тогда

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = 3 \int_0^1 (1 - y) dy = 3 \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 3 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

2. Случай произвольной области интегрирования. Пусть требуется вычислить двойной интеграл $\iint_D f(x, y) d\sigma$, где D — произвольная

область интегрирования, ограниченная кривой, которая пересекается с любой прямой, параллельной оси Ox или Oy , не более чем в двух точках. В противном случае область D можно разбить на несколько частей, для которых данное условие выполняется, а, согласно свойству 4, двойной интеграл по всей области равен сумме двойных интегралов по этим частям.

Заклучим область D в прямоугольник (рис. 19.6). Пусть уравнениями линий ACB и AFB являются соответственно $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$. Согласно предположению, $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — однозначные функции. Разобьем область D на частичные области прямыми, параллельными осям координат. Из частичных областей учитываем только прямоугольники, так как сумма их площадей при неограниченном увеличении числа частичных областей стремится к площади области D . Поэтому в данном случае можно считать $\Delta\sigma_i = \Delta x_i \Delta y_i$ и $d\sigma = dx dy$.

Если в области D функция $f(x, y) \geq 0$, то двойной интеграл численно равен объему цилиндрического тела, т. е.

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (*)$$

Рассечем тело плоскостью $MM'N'NM$, параллельной плоскости yOz (рис. 19.7). Тогда площадь сечения может быть вычислена с помощью определенного интеграла с переменными пределами $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, зависящими от x , т. е.

$$S(x) = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

Объем цилиндрического тела

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (**)$$

Приравниваем объемы (*) и (**):

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (19.16)$$

При вычислении двойного интеграла необходим чертеж области D .

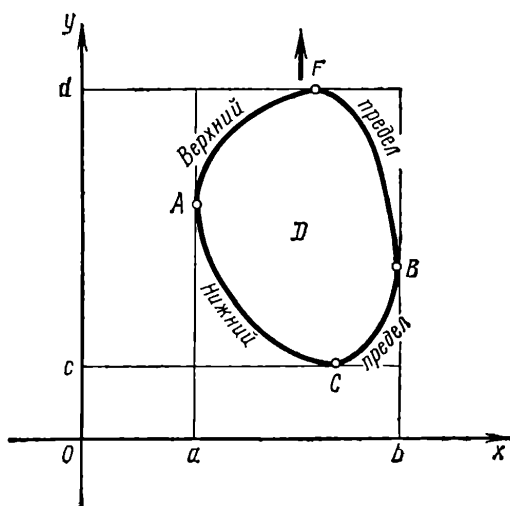


Рис. 19.6

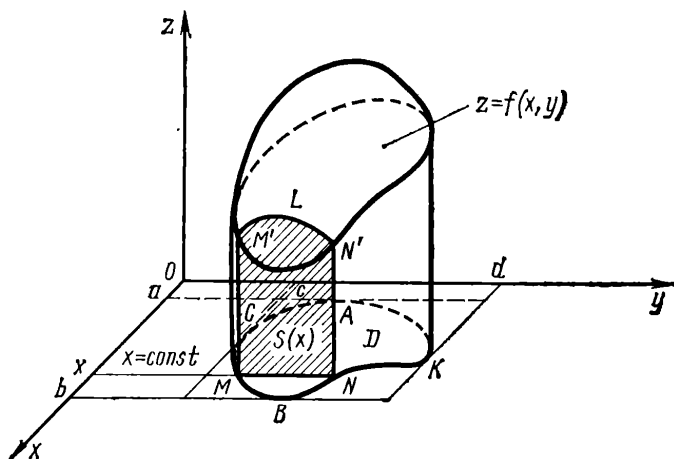


Рис. 19.7

Аналогично, если $x = \varphi_1(y)$ и $x = \varphi_2(y)$ — уравнения частей границ CAK и CBK области интегрирования (рис. 19.8), то площадь сечения

тела плоскостью, параллельной плоскости xOz ,

$$S(y) = \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx,$$

а объем цилиндрического тела

$$V = \int_c^d S(y) dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \\ &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (19.17)$$

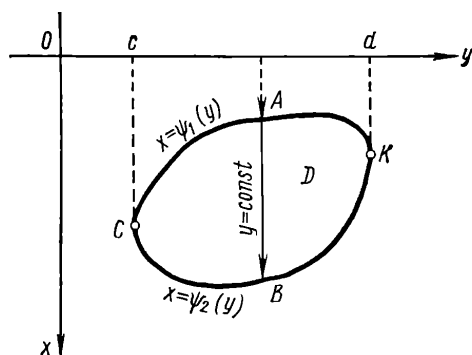


Рис. 19.8

Если в области D функция $f(x, y)$ меняет знак, то прибавим к $f(x, y)$ такое положительное число ε , чтобы в области D выполнялось неравенство $\varepsilon + f(x, y) \geq 0$. Применяем к функции $\varepsilon + f(x, y)$ формулу (19.16):

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_D [(\varepsilon + f(x, y)) - \varepsilon] dx dy = \\ &= \iint_D [\varepsilon + f(x, y)] dx dy - \iint_D \varepsilon dx dy = \\ &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} [\varepsilon + f(x, y)] dy - \varepsilon S = \\ &= \varepsilon \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy + \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy - \varepsilon S = \\ &= \varepsilon \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx + \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy - \varepsilon S. \end{aligned}$$

Поскольку определенный интеграл

$$\int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx$$

численно равен площади S области D (рис. 19.6), то формула (19.16) справедлива для функции $f(x, y)$ любого знака. Аналогично, формула (19.17) применима в случае, если подынтегральная функция $f(x, y)$ принимает значения любого знака.

По формулам (19.16) и (19.17) вычисляется двойной интеграл в случае произвольной области интегрирования. Для вычисления двойного интеграла надо подынтегральную функцию проинтегриро-

вать по одной переменной при фиксированном произвольном значении второй и полученный результат проинтегрировать по второй переменной в наибольших пределах ее изменения. В случае произвольной области интегрирования пределы внутреннего интегрирования, как правило, переменные, а внешнего — обязательно постоянные числа.

Сравнивая формулы (19.16) и (19.17), имеем

$$\begin{aligned} & \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx = \\ & = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (19.18) \end{aligned}$$

При изменении порядка интегрирования надо также изменить пределы интегрирования.

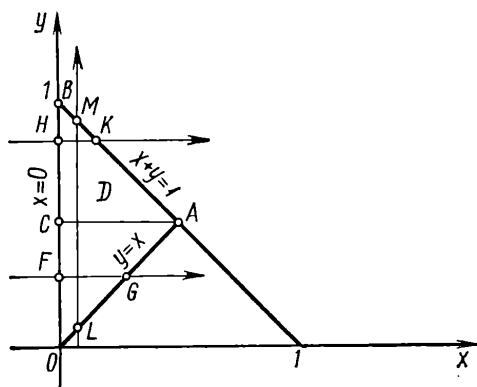


Рис. 19.9

Пример 1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 - y) dx dy$, где область интегрирования D — треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $y = x$, $x = 0$ (рис. 19.9).

Решение. Способ 1. Областью интегрирования D является треугольник OAB . Если использовать формулу (19.16), то надо внутреннее интегрирование вести по y при фиксированном x . Пересекаем область D направленной прямой LM , вдоль которой меняется только y и не меняется x . Будем перемещаться по прямой LM снизу вверх: точки входа в область D лежат на прямой OA , где $y = x$, а точки выхода — на прямой AB , где $y = 1 - x$. Внешнее интегрирование надо вести по x в наибольших пределах его изменения, т. е. от $x = 0$ до $x = 1/2$. Значение $x = 1/2$ является абсциссой точки A и получается в результате решения системы уравнений, определяющих прямые OA и AB : $y = x$ и $x + y = 1$. Таким образом,

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = \int_0^{1/2} dx \int_x^{1-x} (x^2 - y) dy.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_x^{1-x} (x^2 - y) dy = \left[x^2 y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=x}^{y=1-x} = \\ & = x^2 (1-x) - x^3 - \frac{1}{2} [(1-x)^2 - x^2] = x^2 - 2x^3 + x - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_0^{1/2} \left(x^2 - 2x^3 + x - \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} \right]_0^{1/2} = -\frac{11}{96}. \end{aligned}$$

Способ 2. При вычислении интеграла по формуле (19.17) для внутреннего интегрирования по x надо пересечь область D горизонтальной прямой. Если пересечь область D направленной прямой FG , положительное направление которой совпадает с положительным направлением оси Ox (рис. 19.9), то прямая входит в область на прямой OB и выходит на прямой OA . Будем перемещаться по прямой HK , имеющей то же направление, что и Ox : точки входа этой прямой лежат на прямой OB , а точки выхода — на прямой AB . Поэтому, на основании свойства 4, область D придется разбить прямой CA на две части. Тогда в треугольнике OCA x меняется от $x=0$ на прямой OC до $x=y$ на прямой OA , а y — от 0 до $1/2$. В другой части области D (треугольнике CAB) x меняется от $x=0$ на прямой CB до $x=1-y$ на прямой AB , y здесь меняется от $1/2$ до 1. Итак,

$$\iint_D (x^2 - y) dx dy = \int_0^{1/2} dy \int_0^y (x^2 - y) dx + \int_{1/2}^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 - y) dx.$$

Вычислим внутренние интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^y (x^2 - y) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - xy \right]_{x=0}^{x=y} = \frac{y^3}{3} - y^2; \\ \int_0^{1-y} (x^2 - y) dx &= \left[\frac{x^3}{3} - xy \right]_{x=0}^{x=1-y} = \\ &= \frac{(1-y)^3}{3} - (1-y)y = \frac{1}{3} - 2y + 2y^2 - \frac{y^3}{3}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 - y) dx dy &= \int_0^{1/2} \left(\frac{y^3}{3} - y \right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\frac{1}{3} - 2y + 2y^2 - \frac{y^3}{3} \right) dy = \\ &= \left[\frac{y^4}{12} - \frac{y^3}{3} \right]_0^{1/2} + \left[\frac{y}{3} - y^2 + \frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{12} \right]_{1/2}^1 = -\frac{11}{96}. \end{aligned}$$

Итак, при разных порядках интегрирования один и тот же двойной интеграл представляется разным количеством двукратных интегралов.

Пример 2. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

Решение. Из условия следует, что область интегрирования D ограничена прямыми $y=0$ и $y=1$, прямой $x=y$ и линией $x=1+\sqrt{1-y^2}$ или $(x-1)^2+y^2=1$, которая представляет собой окружность с центром $C(1; 0)$ и радиусом, равным 1. Область интегри-

рования изображена на рис. 19.10. Для того чтобы при изменении порядка интегрирования расставить внутренние пределы интегрирования по y , надо область интегрирования D разбить на две части — треугольник OCB и четверть круга ABC , а уравнения границ решить относительно y . Тогда, в частности, из уравнения для верхней полуокружности имеем

$y = \sqrt{2x - x^2}$. Итак,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_y^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx = \\ = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy + \\ + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

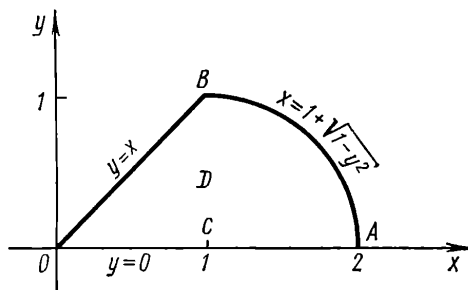


Рис. 19.10

Пример 3. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле

$$I = \int_{-1}^{-1/4} dx \int_{-\sqrt{-x}}^x f(x, y) dy.$$

Решение. Область интегрирования ограничена линиями $y = -\sqrt{-x}$ (или $x = -y^2$), $y = x$, $x = -1$ и $x = -1/4$ (рис. 19.11). При перемене порядка интегрирования внутреннее интегрирование

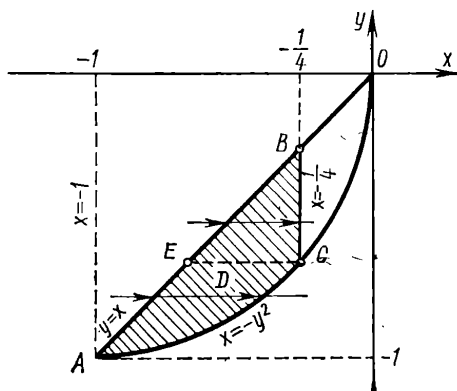


Рис. 19.11

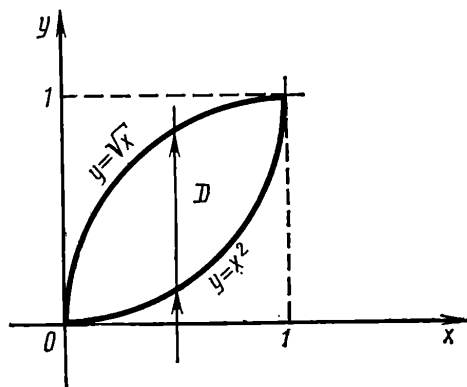


Рис. 19.12

будет по x и придется разбить область интегрирования на две части: AEC и BEC . Проводя через них прямые, параллельные оси Ox , видим, что они имеют общую линию входа $x = y$, но разные линии выхода $x = -y^2$ (AEC) и $x = -\frac{1}{4}$ (BEC), которые являются пределами внутренних интегралов. Чтобы выяснить пределы внешних интегралов, нужно найти ординаты точек A , C и B . Решим совместно уравне-

ния линий, проходящих через эти точки. Получим: $y_A = -1$, $y_C = -1/2$, $y_B = -1/4$.

Окончательно имеем

$$I = \int_{-1}^{-1/2} dy \int_y^{-y^2} f(x, y) dx + \int_{-1/2}^{-1/4} dy \int_y^{-1/2} f(x, y) dx.$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $I = \iint_D dx dy$, если

область интегрирования D ограничена линиями $y = x^2$ и $x = y^2$ (рис. 19.12).

Решение. Если вести внутреннее интегрирование по y , то область D следует пересечь прямой, параллельной оси Oy . Тогда линией входа является парабола $y = x^2$, а линией выхода — парабола $y = \sqrt{x}$ (верхняя ветвь параболы $y = \pm \sqrt{x}$). Это и есть пределы внутреннего интеграла.

Для того чтобы определить пределы внешнего интеграла, найдем точки пересечения кривых. Решая совместно уравнения $y = x^2$ и $x = y^2$, имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, откуда

$$I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 (V\bar{x} - x^2) dx = \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Если внутреннее интегрирование вести по x , то

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx = \frac{1}{3}.$$

Порядок интегрирования здесь безразличен.

Упражнения

Вычислить двойные интегралы:

1. $\iint_D xy dx dy$, если область интегрирования D — треугольник, ограничен-

ный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$.

Отв. $1/24$.

2. $\iint_D \frac{y^2}{1+x^2} dx dy$, если область D — прямоугольник $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 3$.

Отв. $\frac{13}{16} \pi$.

3. $\iint_D x^2 y dx dy$, если D — область, ограниченная линиями $y = x^2$, $y = 1$.

Отв. $4/21$.

4. $\iint_D \sin \left(2x + y + \frac{\pi}{4} \right) dx dy$, если область D — прямоугольник $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$;

$-\frac{\pi}{4} \leq y \leq 0$.

Отв. $\sqrt{2}/2$.

5. $\iint_D (x+y) dx dy$, если область D — треугольник, ограниченный прямыми $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

Омс. 9.

6. $\iint_D e^{\frac{y}{x}} dx dy$, если область интегрирования D ограничена линиями $y = \frac{x^2}{9}$, $x=3$, $y=0$.

Омс. $153/2 - 54 \sqrt[3]{e} \approx 1,1$.

7. $\iint_D (x^3+y^3) dx dy$, если область интегрирования D ограничена линиями $y = \frac{x}{2}$, $y=x$, $x=4$.

Омс. 752/5.

8. $\iint_D \frac{y^3}{x^2} dx dy$, если область интегрирования D ограничена линиями $y = \frac{x}{3}$, $y = \sqrt{x}$, $x=1$.

Омс. 121/486.

9. $\iint_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy$, если область интегрирования D ограничена прямыми $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$.

Омс. 1/2.

Изменить порядок интегрирования в двойных интегралах:

$$10. \int_0^3 dx \int_{3-x}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$\text{Омс. } \int_0^3 dy \int_{3-y}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$11. \int_0^3 dx \int_0^{x/3} f(x, y) dy + \int_3^4 dx \int_0^{4-x} f(x, y) dy.$$

$$\text{Омс. } \int_0^1 dy \int_{3y}^{4-y} f(x, y) dx.$$

$$12. \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy.$$

$$\text{Омс. } \int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_{y/3}^1 f(x, y) dx.$$

$$13. \int_{-1}^0 dx \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} z dy.$$

$$\text{Омс. } \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{y-1} z dx.$$

$$14. \int_1^2 dy \int_{\ln y}^y f(x, y) dx.$$

$$\text{Омс.} \int_0^{\ln 2} dx \int_1^{e^x} f(x, y) dy + \int_{\ln 2}^1 dx \int_1^2 f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_x^2 f(x, y) dy.$$

$$15. \int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$\text{Омс.} \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$$

$$16. \int_0^{\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y) dy.$$

$$\text{Омс.} \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_0^{\arcsin y} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 dx \int_0^{\arccos y} f(x, y) dx.$$

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В ряде случаев вычисление двойного интеграла $\iint_D f(x, y) d\sigma$

упрощается, если перейти от прямоугольных к полярным координатам (ρ и φ). В полярной системе координат координатными линиями являются: $\rho = \text{const}$ — концентрические окружности с центром в полюсе и $\varphi = \text{const}$ — радиусы-векторы, выходящие из полюса. Так как прямоугольные и полярные координаты точки связаны зависимостью $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, то подынтегральная функция в полярных координатах имеет вид

$$f(x, y) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi). \quad (19.19)$$

Выразим дифференциал площади $d\sigma$ в полярных координатах. Для этого разобьем данную область интегрирования D на частичные области координатными линиями: окружностями $\Delta\sigma_i$ с центром в полюсе O (рис. 19.13), на которых $\rho = \text{const}$, и полярными лучами, где $\varphi = \text{const}$. Рассмотрим элемент $ABECA$, ограниченный окружностями $\rho = \rho_i$, $\rho = \rho_i + \Delta\rho_i$ и полярными лучами $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_i + \Delta\varphi_i$. Площадь сектора равна половине произведения квадрата радиуса на центральный угол (в радианах), а площадь $\Delta\sigma_i$ равна разности площадей секторов с радиусами ρ_i и $\rho_i + \Delta\rho_i$ и центральным углом $\Delta\varphi_i$. Поэтому площадь элемента $ABECA$ может быть вычислена как разность площадей круговых секторов $OCEO$ и $OABO$:

$$\Delta\sigma_i = \frac{1}{2} (\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \Delta\varphi_i - \frac{1}{2} \rho_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2} (\rho_i^2 + 2\rho_i \Delta\rho_i + \Delta\rho_i^2 - \rho_i^2) \Delta\varphi_i,$$

или

$$\Delta\sigma_i = \rho_i \Delta\rho_i \Delta\varphi_i + \frac{1}{2} \Delta\rho_i^2 \Delta\varphi_i.$$

Бесконечно малое приращение $\Delta\sigma_i$ площади есть сумма двух слагаемых: бесконечно малой второго порядка, являющейся главной частью приращения (дифференциалом $d\sigma$ площади) и бесконечно малой третьего порядка, которой можно пренебречь. Дифференциал площади в полярных координатах

$$d\sigma = \rho_i \Delta\rho_i \Delta\varphi_i,$$

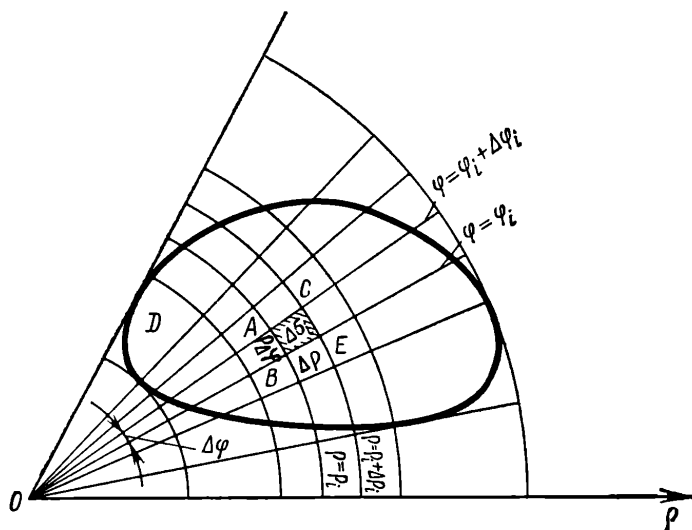


Рис. 19.13

т.е. элементарная криволинейная площадка $\Delta\sigma_i$ заменена прямоугольником со сторонами $\Delta\rho_i$ и $\rho_i \Delta\varphi_i$. Устремим к нулю диаметр элемента, тогда

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi. \quad (19.20)$$

Подставляя соотношения (19.19) и (19.20) в выражение двойного интеграла, получим

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho. \quad (19.21)$$

Переход от декартовой к полярной системе координат не является формальной заменой переменных по формулам перехода: при переходе видоизменяется сама форма элементарной площадки. Таким образом, равенство (19.21) позволяет преобразовать двойной интеграл, заданный в декартовых координатах, к полярным координатам. Уравнения контура области интегрирования следует также преобразовать к полярным координатам.

Случай 1. Полус находится вне области интегрирования D . Вычислим двойной интеграл

$$\iint_D F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi. \quad (19.22)$$

Предположим, что полярный луч пересекает границу области D не более чем в двух точках (рис. 19.14). В противном случае область D можно разбить на части, для которых это условие выполняется,

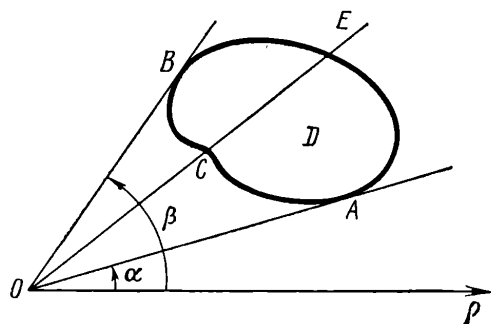


Рис. 19.14

и воспользоваться свойством о разбиении области интегрирования. Проведем из полюса касательные OA и OB к границе области, наклоненные к полярной оси соответственно под углами α и β . Пусть уравнение части границы ACB имеет вид $\rho = \rho_1(\varphi)$, а AEB — вид $\rho = \rho_2(\varphi)$. Для вычисления двойного интеграла приведем его к двукратному интегралу. Введем внутреннее интегрирование по ρ при

фиксированном произвольном значении переменной φ . Геометрически это соответствует тому, что область D пересекается произвольным лучом OCE . На участке CE этого луча, расположенном внутри области D , переменная ρ меняется от $\rho_1(\varphi)$ до $\rho_2(\varphi)$. Значения φ изменяются в пределах от α до β . Следовательно,

$$\iint_D F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} F(\rho, \varphi) d\rho. \quad (19.23)$$

Случай 2. Полюс находится внутри области интегрирования D . Пусть область интегрирования D ограничена

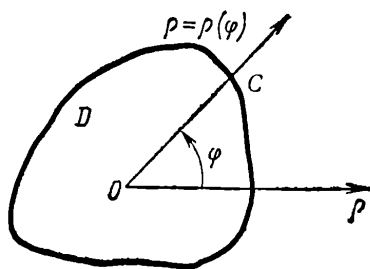


Рис. 19.15

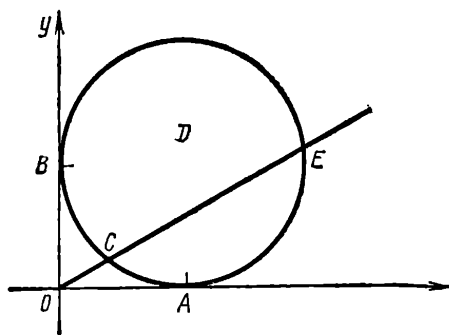


Рис. 19.16

линией $\rho = \rho(\varphi)$, а полюс находится внутри области. Фиксируем произвольно переменную φ , т. е. величину ρ изменяем вдоль произвольного луча OC . Тогда ρ меняется от 0 до $\rho(\varphi)$, а величина φ меняется от 0 до 2π . Итак, если область D содержит в себе полюс, то нижние пределы обоих определенных интегралов равны нулю, а φ возрастает до 2π (рис. 19.15):

$$\iint_D F(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho(\varphi)} F(\rho, \varphi) d\rho. \quad (19.24)$$

Переход к полярным координатам целесообразен в случае, если область D ограничена дугой окружности.

Пример. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{\cos \varphi} d\rho d\varphi,$$

если область D — круг, ограниченный окружностью (рис. 19.16)

$$\rho^2 = 2\rho(\cos \varphi + \sin \varphi) - 1.$$

Решение. Решая квадратное уравнение относительно ρ , получаем

$$\rho_{1,2} = \cos \varphi + \sin \varphi \pm \sqrt{(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 - 1},$$

или

$$\rho_{1,2} = \cos \varphi + \sin \varphi \pm \sqrt{\sin 2\varphi}.$$

Уравнение дуги ACB : $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}$, уравнение дуги AEB : $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}$. Точке A соответствует значение $\varphi = 0$, а точке B — значение $\varphi = \pi/2$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{\cos \varphi} d\rho d\varphi &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \int_{\cos \varphi + \sin \varphi - \sqrt{\sin 2\varphi}}^{\cos \varphi + \sin \varphi + \sqrt{\sin 2\varphi}} d\rho = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos \varphi \sin 2\varphi} d\varphi = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin \varphi} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sin^3 \varphi} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Вычислить двойной интеграл $\iint_D dx dy$, если область D — треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(2; 1)$, $B(3; 3)$.

Отв. $3/2$.

2. Вычислить двойной интеграл $\iint_D r^2 dr d\varphi$, если область D — часть плоскости, ограниченная окружностью $r = a$ и кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$, которая не содержит полюса.

Отв. $(22/9 + \pi/2) a^3 \approx 4a^3$.

3. С помощью преобразования к полярным координатам вычислить двойной интеграл $\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy$, если область D — круг $x^2 + y^2 \leq 4$.

Отв. $\frac{2}{3} \pi (5\sqrt{5} - 1) \approx 21,4$.

4. Вычислить двойной интеграл $\int_D \int r^3 dr d\varphi$, если D —область, ограниченная полярной осью и кривой $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, причем $\varphi < \pi/2$.

Отв. $\frac{1}{32} \pi a^4$.

5. Вычислить двойной интеграл $\int_D \int r \sin \varphi dr d\varphi$, если область D —круговой сектор, ограниченный линиями $r = a$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\varphi = \pi$.

Отв. $a^2/2$.

6. Вычислить двойной интеграл $\int_D \int r^3 dr d\varphi$, если область D ограничена окружностями $r = a$, $r = 2a$.

Отв. $\frac{14}{3} \pi a^3$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Двойной интеграл $\iint_D d\sigma$ выражает площадь области D . Запишем формулы для вычисления площади S плоской фигуры:

а) в случае прямоугольных координат

$$S = \iint_D dx dy; \quad (20.1)$$

б) в случае полярных координат

$$S = \iint_D \rho d\rho d\varphi. \quad (20.2)$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямой $y=2$ и параболой $y=x^2-1$ (рис. 20.1).

Решение. Фигура симметрична относительно оси ординат. Поэтому вычислим площадь ее правой половины и результат удвоим. Правая половина фигуры проектируется на ось Oy в отрезок $[-1, 2]$ и имеет левой границей прямую $x=0$, а правой — линию $y=x^2-1$, или $x=\sqrt{y+1}$. Таким образом,

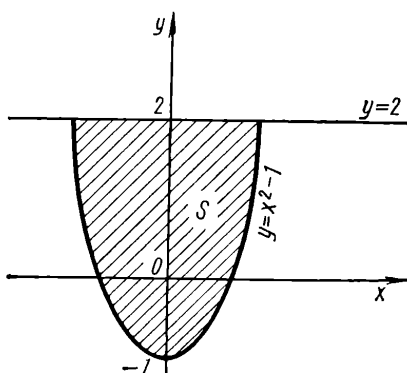


Рис. 20.1

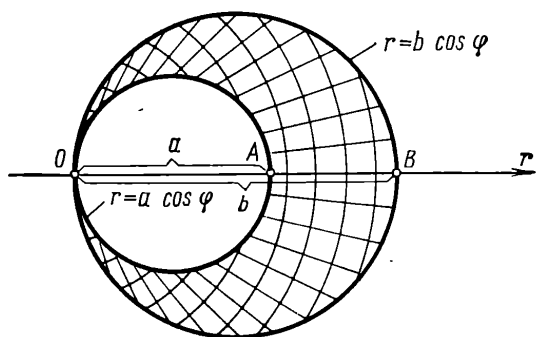


Рис. 20.2

$$\begin{aligned} \frac{S}{2} &= \int_{-1}^2 dy \int_0^{\sqrt{y+1}} dx = \\ &= \int_{-1}^2 x \Big|_0^{\sqrt{y+1}} dy = \\ &= \int_{-1}^2 \sqrt{y+1} dy = \\ &= \frac{2}{3} (y+1)^{3/2} \Big|_{-1}^2 = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Искомая площадь

$$S = 4\sqrt{3} \text{ кв. ед.}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = a \cos \varphi$, $r = b \cos \varphi$, $b > a > 0$.

Решение. Строим данные окружности в полярной системе координат (рис. 20.2). Обе окружности симметричны относительно полярной оси и верхняя половина каждой из них получается при изменении угла φ от 0 до $\pi/2$. Находим площадь S ограниченной ими области D по формуле (20.2):

$$\begin{aligned} S &= \iint_D r \, d\varphi \, dr = 2 \int_{ABO} \int r \, d\varphi \, dr = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{b \cos \varphi} r \, dr = \\ &= (b^2 - a^2) \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \frac{b^2 - a^2}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi) \, d\varphi = \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} (b^2 - a^2) \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

§ 2. ОБЪЕМ ТЕЛА

Объем цилиндрического тела, ограниченного поверхностью $z = f(x, y)$, областью D плоскости xOy и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , определяется по формуле

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy. \quad (20.3)$$

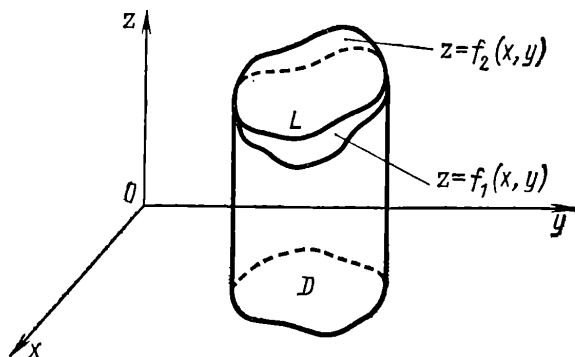


Рис. 20.3

Эта формула справедлива, если тело целиком расположено над плоскостью xOy . Согласно свойству о знаке двойного интеграла, в случае если цилиндрическое тело расположено под плоскостью xOy , двойной интеграл, вычисленный по этой формуле, имеет отрицательное значение и результат надо брать по абсолютной величине. Если же цилиндрическое тело расположено частично над плоскостью xOy и частично под ней, надо вычислить объем каждой такой части, а затем взять сумму их абсолютных величин.

Для вычисления объема произвольного тела (рис. 20.3) проведем касающуюся по линии L поверхности этого тела цилиндриче-

скую поверхность с образующими, параллельными оси Oz . Если $z=f_1(x, y)$ —уравнение части поверхности тела, расположенной ниже L , а $z=f_2(x, y)$ —части, расположенной выше L и D —проекция тела на плоскость xOy , то объем тела

$$V = \iint_D [f_2(x, y) - f_1(x, y)] dx dy. \quad (20.4)$$

При вычислении объема можно проектировать тело на плоскости yOz или xOz . Тогда

$$V = \iint_{D_1} f(y, z) dy dz \quad (20.5)$$

или

$$V = \iint_{D_2} f(x, z) dx dz, \quad (20.6)$$

где D_1 и D_2 —проекции тела соответственно на плоскости yOz и xOz .

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Ввиду симметрии вычисляем объем восьмой части тела, расположенной в I октанте. Проекцией D этой части на плоскость xOy является эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, расположенный в I четверти. Из уравнения эллипсоида имеем

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Тогда

$$\frac{1}{8} V = \iint_D c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = c \int_0^a dx \int_0^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dy.$$

Вычисляем внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} & b \int_0^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)^2} d\left(\frac{y}{b}\right) = \\ & = b \left[\frac{\frac{y}{b} \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)^2}}{2} + \frac{1 - \frac{x^2}{a^2}}{2} \arcsin \frac{\frac{y}{b}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \right]_0^{b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} = \\ & = b \frac{1 - \frac{x^2}{a^2}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi b}{4} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{8} V = \frac{\pi bc}{4} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{\pi bc}{4} \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = \frac{\pi abc}{6},$$

откуда искомый объем

$$V = \frac{4}{3} \pi abc \text{ куб. ед.}$$

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ (рис. 20.4).

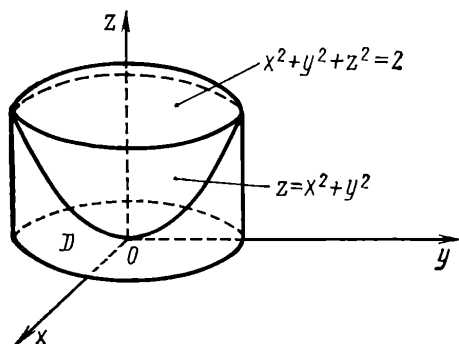


Рис. 20.4

Решение. Из уравнения сферы имеем $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Решая совместно уравнения сферы и параболоида, получаем $z^2 + z = 2$, откуда $z = 1$. Сфера и параболоид пересекаются по окружности $x^2 + y^2 = 1$, лежащей в плоскости $z = 1$. Проекцией D тела на плоскость xOy является круг $x^2 + y^2 \leq 1$. Таким образом,

$$V = \iint_D [\sqrt{2 - x^2 - y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получим

$$V = \iint_D [\sqrt{2 - r^2} - r^2] r dr d\varphi,$$

где D — круг радиуса $r \leq 1$.

Итак, искомый объем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 [\sqrt{2 - r^2} - r^2] r dr = \left[-\frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{2 - r^2} d(2 - r^2) - \int_0^1 r^3 dr \right] \times \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2 - r^2)^3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \varphi \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \left[-\frac{1}{3} (1 - 2\sqrt{2}) - \frac{1}{4} \right] 2\pi = \frac{\pi}{6} (8\sqrt{2} - 7) \approx 2,25 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

§ 3. ПЛОЩАДЬ КРИВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть задана поверхность $z = f(x, y)$, непрерывная и гладкая, т. е. такая, на которой бесконечно малому перемещению точки соответствует бесконечно малое изменение положения нормали. Функция $f(x, y)$ является дифференцируемой в области D .

Рассмотрим кусок S этой поверхности (рис. 20.5). Спроектировав его на плоскость xOy , получим плоскую область D . Разделим поверхность на n элементов и вычислим площадь каждого элемента

ΔS_i , окружающего точку поверхности $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$. Приблизительно этот элемент поверхности совпадает с элементом касательной плоскости к поверхности в точке M_i . Уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке $A_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0(x-x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0(y-y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0(z-z_0) = 0,$$

поэтому если уравнение поверхности записать в виде

$$-f(x, y) + z = 0,$$

то уравнение касательной плоскости к ней в точке $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$

$$-f'_x(\xi_i, \eta_i)(x-\xi_i) -$$

$$-f'_y(\xi_i, \eta_i)(y-\eta_i) + (z-\zeta_i) = 0.$$

Пусть γ_i — угол между касательной плоскостью и плоскостью xOy , совпадающий с углом между нормалью N_i к поверхности и осью Oz . Угол между перпендикуляром к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и осью Oz вычисляется по формуле

$$\cos \gamma_i = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В уравнении касательной плоскости коэффициенту A соответствует значение $-f'_x(\xi_i, \eta_i)$, коэффициенту B значение $-f'_y(\xi_i, \eta_i)$, а $C = 1$. Следовательно,

$$\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2}}.$$

Пусть $\Delta \sigma_i$ — площадь проекции элемента на плоскость xOy . Тогда

$$\Delta S_i = \frac{\Delta \sigma_i}{\cos \gamma_i} = \sqrt{1 + [f'_x(\xi_i, \eta_i)]^2 + [f'_y(\xi_i, \eta_i)]^2} \Delta \sigma_i.$$

Суммируем площади элементов и переходим к пределу при $n \rightarrow \infty$, устремив диаметры элементов к нулю. Тогда площадь поверхности $z = f(x, y)$, имеющей проекцией на плоскость xOy область интегрирования D ,

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (20.7)$$

Если уравнение поверхности можно представить в виде

$$x = f(y, z) \text{ или } y = f(x, z),$$

то площадь поверхности вычисляется по формулам:

$$S = \iint_{D_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz \quad (20.8)$$

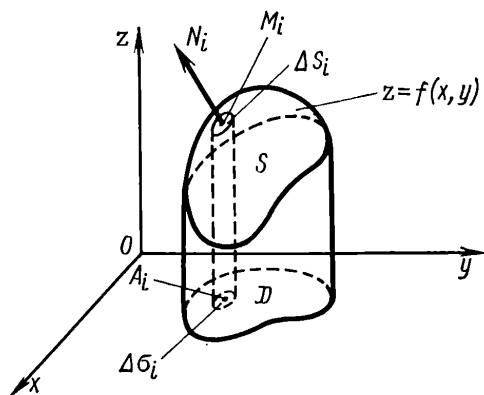


Рис. 20.5

или

$$S = \iint_{D_2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dx dz. \quad (20.9)$$

Здесь D_1 и D_2 — проекции поверхности на плоскость yOz или xOz .

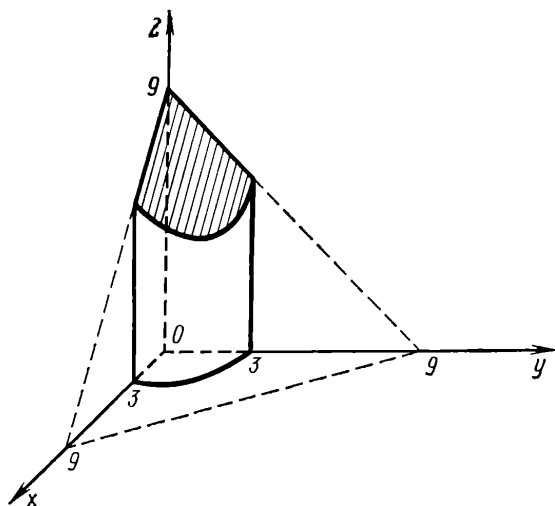


Рис. 20.6

Пример 1. Вычислить площадь части плоскости $x + y + z = 9$, ограниченной координатными плоскостями и цилиндром $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 20.6).

Решение. Из уравнения плоскости $z = 9 - x - y$ находим частные производные: $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -1$. Областью интегрирования D является четверть круга $x^2 + y^2 \leq 9$, ограниченного положительными полуосьями координат. Искомая площадь части поверхности

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{3} dx dy = \sqrt{3} \int_0^3 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} dy = \sqrt{3} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x\sqrt{9-x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3} \right]_0^3 = \frac{9}{4} \sqrt{3} \pi \approx 12,2 \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

Пример 2. Найти площадь части поверхности $x^2 + z^2 = a^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 20.7).

Решение. Так как все переменные входят в уравнения поверхностей только в квадратах, то имеем тройную симметрию (относительно всех координатных плоскостей). Интегрируя по I четверти, находим

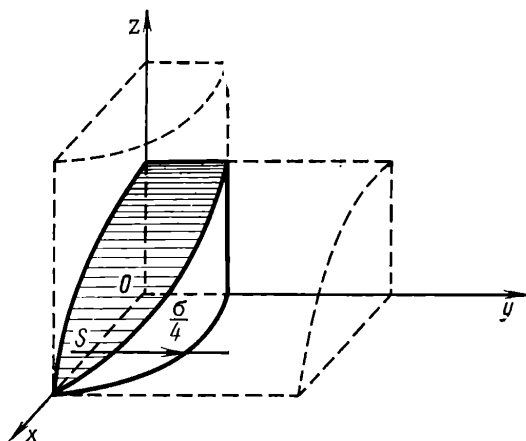


Рис. 20.7

$$S = 8 \iint_{\sigma/4} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} d\sigma,$$

где σ — круг $x^2 + y^2 \leq a^2$.

Дифференцируем уравнение поверхности:

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Искомая площадь куска поверхности

$$\begin{aligned} S &= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dy = \\ &= 8a \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \\ &= 8a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} = \\ &= 8a \int_0^a dx = 8ax \Big|_0^a = 8a^2 \text{ кв. ед.} \end{aligned}$$

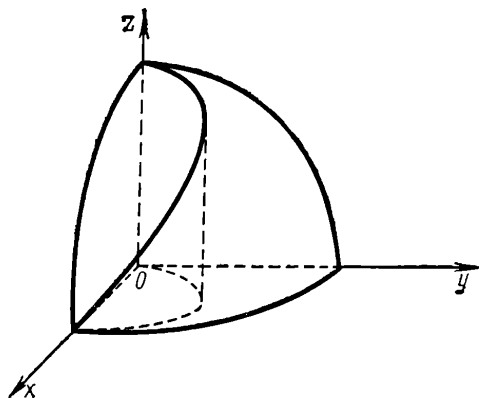


Рис. 20.8

Пример 3. Вычислить площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Ввиду симметрии определяем четвертую часть искомой поверхности (рис. 20.8). Из уравнения сферы имеем

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

откуда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Четвертая часть искомой поверхности

$$\frac{1}{4} S = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

где D — полукруг $x^2 + y^2 \leq R^2$, расположенный в I четверти. Последний интеграл представим в полярных координатах, т. е.

$$\frac{1}{4} S = R \iint_D \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{R^2 - \rho^2}},$$

а уравнение окружности запишем в виде $\rho = R \cos \varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S &= R \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{R \cos \varphi} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} = R \int_0^{\pi/2} \left[-\sqrt{R^2 - \rho^2} \right]_0^{R \cos \varphi} d\varphi = \\ &= R \int_0^{\pi/2} (R - R \sin \varphi) d\varphi = R^2 \left[\varphi - \cos \varphi \right]_0^{\pi/2} = R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$S = 4R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 2R^2 (\pi - 2) \approx 2,28R^2 \text{ кв. ед.}$$

Упражнения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и $y = x^2$.

Отв. $1/3$ кв. ед.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -2$, $y = x + 2$, $y = 2$, $y^2 = x$.

Отв. $40/3$ кв. ед.

3. Найти площадь, ограниченную линиями $xy = a^2$, $x^2 = ay$, $y = 2a$, $x = 0$ ($a > 0$).

У к а з а н и е.

$$S = \int_0^{a/2} dx \int_{x^2/a}^{2a} dy + \int_{a/2}^a dx \int_{x^2/a}^{a^2/x} dy.$$

Отв. $\left(\frac{23}{24} + \ln 2 \right) a^2$ кв. ед.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos \varphi)$ и окружностью $r = a$.

Отв. $S = (2 - \pi/4) a^2$ кв. ед.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатою $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.

Отв. 1 кв. ед.

6. Вычислить площадь, ограниченную кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2ax^3$.

У к а з а н и е. Перейти к полярным координатам.

Отв. $\frac{5}{8} \pi a^2$ кв. ед.

7. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z + x = 6$, $z = 0$.

Отв. $\frac{48}{5} \sqrt{6}$ кв. ед.

8. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$.

Отв. $\pi/2$ кв. ед.

9. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$, параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.

Отв. $\frac{3}{2} \pi$ куб. ед.

10. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 4x$, параболоидом $2z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$.

У к а з а н и е. Перейти к полярным координатам.

Отв. $V = 24\pi$ куб. ед.

11. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $z = x$, $z = 2x$.

У к а з а н и е. Объем тела представить как разность объемов двух цилиндрических тел и вычисления провести в полярных координатах.

Отв. $V = \pi$ куб. ед.

12. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, $x + y - 3 = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Отв. $V = 45$ куб. ед.

13. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - x^2$, $y = 5$, $y = 0$, $z = 0$.

Отв. $V = 53 \frac{1}{3}$ куб. ед.

14. Вычислить площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Отв. $S = \frac{2(2\sqrt{2}-1)}{3} \pi$ кв. ед.

15. Вычислить площадь части поверхности сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, причем $R \leq a$.

Отв. $S = 4\pi(a - \sqrt{a^2 - R^2})$ кв. ед.

16. Вычислить площадь части поверхности конуса, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$.

Отв. $2\sqrt{2}\pi$ кв. ед.

17. Вычислить площадь части поверхности конуса $y^2 + z^2 = x^2$, вырезаемой поверхностью $x^2 + y^2 = 4$.

Отв. 8π кв. ед.

18. Вычислить площадь части поверхности гиперболического параболоида $z = xy$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

Отв. $\frac{2}{3} \pi \left[(1 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right]$ кв. ед.

§ 4. МАССА ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Пусть дана материальная плоская фигура D , распределение массы которой характеризуется плотностью $\rho = \rho(x, y)$. Плотностью в точке называется предел средней плотности элемента, окружающего точку, при неограниченном уменьшении диаметра этого элемента. Средней плотностью элемента называется отношение его массы Δm к площади $\Delta \sigma$.

Для вычисления массы разобьем фигуру D на n элементов $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$. Приближенно массу любого i -го элемента можно считать сосредоточенной в некоторой его точке $A_i(\xi_i; \eta_i)$. Тогда масса элемента

$$\Delta m_i = \rho(\xi_i; \eta_i) \Delta \sigma_i.$$

Масса всей плоской фигуры

$$m = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i; \eta_i) \Delta \sigma_i. \quad (20.10)$$

Итак, масса плоской фигуры есть двойной интеграл по этой фигуре от ее плотности:

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy. \quad (20.11)$$

Пример. Вычислить массу фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, прямой $y = 2x$ и осью абсцисс Ox (рис. 20.9), если плотность δ в любой точке численно равна ее ординате.

Решение. По условию $\delta = y$. Запишем уравнение прямой OB : $x = y/2$ и уравнение дуги AB : $x = \frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}$. Вычислим координаты

точки B пересечения этих линий:
 $x = 3/\sqrt{10}$, $y = 6/\sqrt{10}$. Тогда

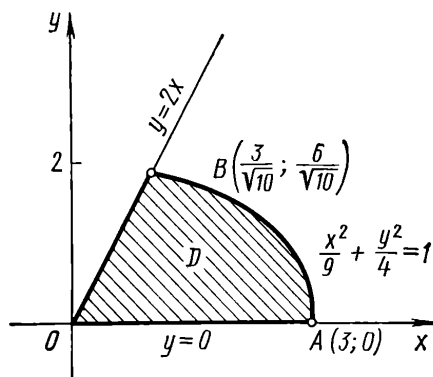


Рис. 20.9

$$m = \int_0^{6/\sqrt{10}} y dy \int_{y/2}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y \sqrt{4-y^2} dy -$$

$$-\frac{1}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y^2 dy =$$

$$= -\frac{3}{4} \int_0^{6/\sqrt{10}} \sqrt{4-y^2} d(4-y^2) - \frac{y^3}{6} \Big|_0^{6/\sqrt{10}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \sqrt{(4-y^2)^3} \Big|_0^{6/\sqrt{10}} - \frac{36}{10\sqrt{10}} = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{8}{\sqrt{10}} \right) - \frac{18}{5\sqrt{10}} =$$

$$= 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right) \approx 2,74.$$

§ 5. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Статическим моментом материальной точки относительно некоторой оси называется произведение массы точки m на расстояние до оси (рис. 20.10).

Статическим моментом дискретной материальной системы называется алгебраическая сумма статических моментов точек системы (рис. 20.11).

Запишем статические моменты относительно осей Ox и Oy материальной системы точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, $\dots$, $M_n(x_n; y_n)$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$:

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i. \quad (20.12)$$

Если точки не дискретны, а заполняют сплошь плоскую фигуру D с переменной плотностью $\delta = \delta(x, y)$, которая является функцией точки $\delta(M) = \delta(x, y)$, то разобьем фигуру на n элементов. Масса любого элемента считается (ввиду малости) сосредоточенной в некоторой его точке $M_i(\xi_i; \eta_i)$. Тогда статические моменты i -го элемента неоднородной плоской фигуры

$$\begin{aligned}\Delta S_{x_i} &\approx \eta_i \Delta m_i; \\ \Delta S_{y_i} &\approx \xi_i \Delta m_i.\end{aligned}\quad (20.13)$$

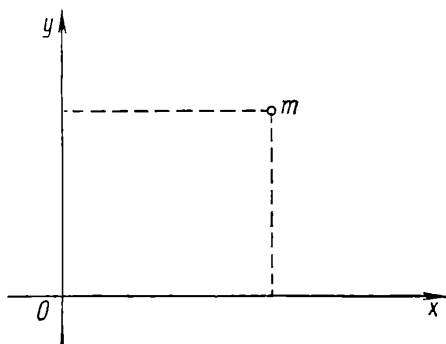


Рис. 20.10

Значение Δm_i из соотношения (20.10) подставляем в формулу (20.13). Полученные выражения ΔS_{x_i} и ΔS_{y_i} просуммируем по i от 1 до n ; перейдя к пределу, получим

$$\begin{aligned}S_x &= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \eta_i \delta(\xi_i; \eta_i) \Delta \sigma_i = \iint_D \delta y \, d\sigma; \\ S_y &= \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \xi_i \delta(\xi_i; \eta_i) \Delta \sigma_i = \iint_D \delta x \, d\sigma.\end{aligned}$$

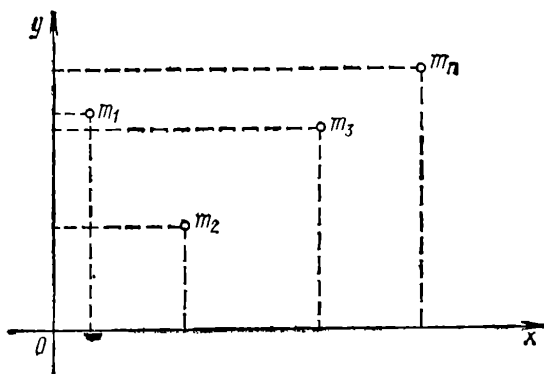


Рис. 20.11

Тогда статические моменты плоской фигуры D с переменной плотностью $\delta = \delta(x, y)$ относительно осей координат

$$S_x = \iint_D y \delta(x, y) \, dx \, dy; \quad S_y = \iint_D x \delta(x, y) \, dx \, dy. \quad (20.14)$$

Если плоская фигура D однородна (плотность δ постоянна), то

$$S_x = \delta \iint_D y \, dx \, dy; \quad S_y = \delta \iint_D x \, dx \, dy. \quad (20.15)$$

Пример 1. Найти статические моменты относительно координатных осей фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, прямой $y = 2x$ и осью абсцисс Ox (рис. 20.9).

Решение. Подставляя в равенство (20.15) $\delta = y$ и учитывая вычисленные ранее пределы интегрирования, находим

$$S_x = \int_0^{6/\sqrt{10}} y^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} dx = \frac{3}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y^2 \sqrt{4-y^2} dy - \frac{1}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y^3 dy.$$

Для вычисления первого интеграла воспользуемся тригонометрической подстановкой $y = 2 \sin t$, откуда $dy = 2 \cos t dt$; новые пределы интегрирования $t = 0$ и $t = \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{6}{\sqrt{10}}} y^2 \sqrt{4-y^2} dy &= 16 \int_0^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} \sin^2 2t dt = \\ &= 2 \int_0^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} (1 - \cos 4t) dt = 2 \left[t - \frac{\sin 4t}{4} \right]_0^{\arcsin \frac{3}{\sqrt{10}}} = \\ &= 2 \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{1}{2} \sin \left(4 \arcsin \frac{3}{\sqrt{10}} \right) \approx \\ &\approx 2 \arcsin 0,95 - \frac{1}{2} \sin (4 \arcsin 0,95) \approx 2 \cdot 1,25 - \frac{1}{2} \sin 5 \approx \\ &\approx 2,50 + \frac{1}{2} \cdot 0,96 = 2,98. \end{aligned}$$

Вычислим второй определенный интеграл:

$$\frac{1}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y^3 dy = \frac{y^4}{8} \Big|_0^{6/\sqrt{10}} = \frac{6^4}{8 \cdot 100} = 1,62.$$

Таким образом, статический момент относительно оси x

$$S_x = 2,98 - 1,62 = 1,36 \text{ куб. ед.}$$

Статический момент относительно оси y

$$\begin{aligned} S_y &= \int_0^{6/\sqrt{10}} y dy \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{6/\sqrt{10}} y \left[\frac{9}{4} (4 - y^2) - \frac{y^2}{4} \right] dy = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{6/\sqrt{10}} (36y - 10y^3) dy = \frac{1}{4} \left[9y^2 - \frac{5}{4} y^4 \right]_0^{6/\sqrt{10}} \approx \\ &\approx \frac{1}{4} (32,4 - 16,2) = 4,05 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

Пример 2. Найти статический момент полукруга $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ относительно диаметра, если плотность $\delta = 1$ (рис. 20.12).

Решение. Статический момент относительно оси абсцисс

$$S_x = \iint_D y d\sigma.$$

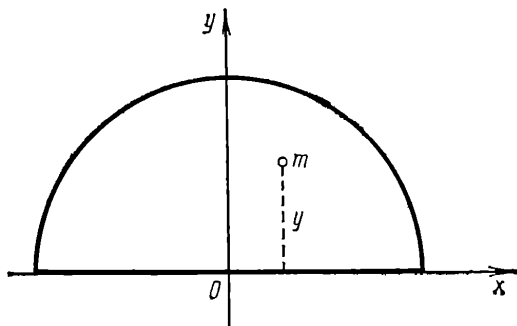


Рис. 20.12

Перейдем к полярным координатам. Ввиду симметрии относительно оси Oy имеем

$$S_x = 2 \iint_{D/2} \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = 2 \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{2R^3}{3} \text{ куб. ед.}$$

§ 6. КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Центром тяжести плоской фигуры называется точка, которая в случае, если считать ее массу равной массе фигуры, имеет относительно координатных осей статические моменты, равные соответствующим статическим моментам данной фигуры.

Пусть x_C, y_C — координаты центра тяжести C фигуры. Тогда

$$mx_C = S_y; \quad my_C = S_x. \quad (20.16)$$

Подставляя в соотношения (20.16) значения статических моментов S_x и S_y по формулам (20.14), а массу m согласно зависимости (20.11), получаем формулы для определения координат центра тяжести плоской фигуры D с непрерывной массой и переменной плотностью $\delta = \delta(x, y)$:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{\iint_D x \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}; \\ y_C &= \frac{\iint_D y \delta(x, y) dx dy}{\iint_D \delta(x, y) dx dy}. \end{aligned} \right\} \quad (20.17)$$

Если плоская фигура D однородна ($\delta = \text{const}$), то, вынося постоянную из-под знака интеграла и сокращая, получим

$$x_c = \frac{1}{S} \iint_D x \, dx \, dy; \quad y_c = \frac{1}{S} \iint_D y \, dx \, dy. \quad (20.18)$$

Здесь S — площадь фигуры D .

Если однородная плоская фигура имеет ось симметрии или точку симметрии, то центр тяжести расположен на этой оси или в этой точке. В полярной системе координат формулы (20.18) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\iint_D r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi}{\iint_D r \, dr \, d\varphi} = \frac{1}{S} \iint_D r^2 \cos \varphi \, dr \, d\varphi; \\ y_c &= \frac{\iint_D r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi}{\iint_D r \, dr \, d\varphi} = \frac{1}{S} \iint_D r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (20.19)$$

Пример 1. Найти координаты центра тяжести прямоугольного треугольника OAB , катеты которого равны $1/2$ и 1 (рис. 20.13).

Плотность в каждой точке треугольника пропорциональна квадрату расстояния точки до его вершины.

Решение. Рассматривая гипотенузу как прямую, проходящую через две данные точки $A(0; 1)$ и $B(1/2; 0)$, запишем ее уравнение $2x + y = 1$.

Найдем координаты центра тяжести по формулам (20.17), предварительно подставляя в них заданный закон изменения неоднородной плотности $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$,

где k — коэффициент пропорциональности:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= \frac{\iint_D x(x^2 + y^2) \, dx \, dy}{\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy}; \\ y_c &= \frac{\iint_D y(x^2 + y^2) \, dx \, dy}{\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy}. \end{aligned} \right\}$$

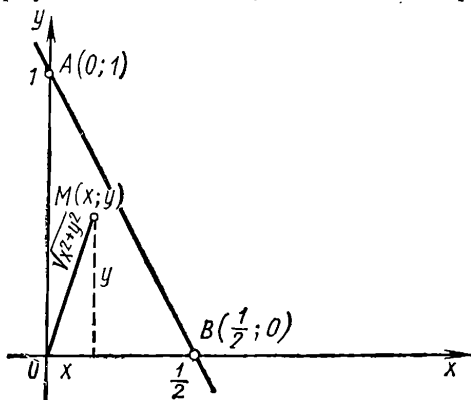


Рис. 20.13

Вычисляем двойные интегралы, входящие в эти равенства:

$$\begin{aligned}
 \text{а)} \quad \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{1/2} dx \int_0^{1-2x} (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^{1/2} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-2x} dx = \int_0^{1/2} \left[x^2 (1-2x) + \frac{(1-2x)^3}{3} \right] dx = \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \right]_0^{1/2} - \frac{1}{6} \int_0^{1/2} (1-2x)^3 d(1-2x) = \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} (1-2x)^4 \Big|_0^{1/2} = \\
 &= \frac{1}{24} - \frac{1}{32} + \frac{1}{24} = \frac{5}{96};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б)} \quad \iint_D x (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{1/2} x dx \int_0^{1-2x} (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^{1/2} \left[x^3 y + \frac{x y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-2x} dx = \int_0^{1/2} \left[x^3 (1-2x) + \frac{x (1-2x)^3}{3} \right] dx = \\
 &= \int_0^{1/2} \left(\frac{x}{3} - 2x^2 + 5x^3 - \frac{14}{3} x^4 \right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{2}{3} x^3 + \frac{5}{4} x^4 - \frac{14}{15} x^5 \right]_0^{1/2} = \frac{7}{960};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{в)} \quad \iint_{D_1} y (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{1/2} dx \int_0^{1-2x} y (x^2 + y^2) dy = \\
 &= \int_0^{1/2} \left[\frac{x^2 y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1-2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left[x^2 (1-2x)^2 + \frac{(1-2x)^4}{2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{2} - 4x + 13x^2 - 20x^3 + 12x^4 \right) dx = \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{x}{2} - 2x^2 + \frac{13}{3} x^3 - 5x^4 + \frac{12}{5} x^5 \right]_0^{1/2} = \frac{13}{480}.
 \end{aligned}$$

Итак, координаты центра тяжести таковы: $x_c = 7/50$, $y_c = 13/25$.

Пример 2. Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, ограниченной верхней половиной эллипса $y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2}$ и осью абсцисс.

Решение. Данная фигура симметрична относительно оси ординат, поэтому ее центр тяжести лежит на оси Oy , т. е. $x_c = 0$. Ордината центра тяжести

$$y_c = \frac{\iint_D y dx dy}{\iint_D dx dy}.$$

Вычислим двойные интегралы, входящие в это равенство:

$$\begin{aligned}\iint_D dx dy &= 2 \int_0^3 dx \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} dy = \frac{4}{3} \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx = \\ &= \frac{2}{3} \left[x\sqrt{9-x^2} + 9 \arcsin \frac{x}{3} \right]_0^3 = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi;\end{aligned}$$

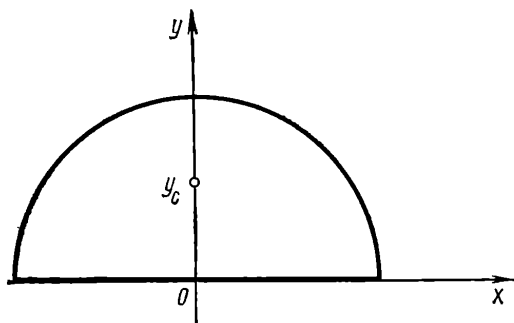


Рис. 20.14

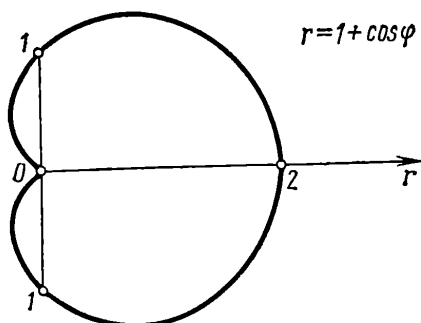


Рис. 20.15

$$\iint_D y dx dy = 2 \int_0^3 dx \int_0^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}} y dy = \frac{4}{9} \int_0^3 (9-x^2) dx = \frac{4}{9} \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 8.$$

Итак, $y_c = \frac{8}{3\pi} \approx 0,85$.

Пример 3. Найти центр тяжести однородного полукруга радиуса R (рис. 20.14).

Решение. Ввиду симметрии $x_c = 0$, кроме того, $\delta = 1$, поэтому

$$\begin{aligned}y_c &= \frac{\iint_D y dx dy}{\frac{1}{2} \pi R^2} = \frac{2 \iint_{D/2} \rho \sin \varphi \rho d\rho d\varphi}{\pi R^2} = \\ &= \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{4}{\pi R^2} \cdot 1 \cdot \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}.\end{aligned}$$

Пример 4. Найти центр тяжести кардиоиды $r = 1 + \cos \varphi$ (рис. 20.15).

Решение. Вычислим сначала площадь кардиоиды. Ввиду симметрии фигуры

$$\begin{aligned}S &= 2 \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \varphi} r dr d\varphi = \int_0^{\pi} r^2 \Big|_0^{1+\cos \varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= \left[\varphi + 2 \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right]_0^{\pi} = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \pi.\end{aligned}$$

По формулам (20.19) находим координаты центра тяжести:

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{1}{S} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \varphi} r \cos \varphi r dr d\varphi = \frac{2}{3\pi} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{r^3}{3} \cos \varphi \Big|_0^{1+\cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + \\
 &+ \cos^3 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \cos^4 \varphi) d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \varphi + 3 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) + 3 (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \right] d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \varphi + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\varphi + \right. \\
 &+ 3 \cos \varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 4\varphi) \left. \right] d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{15}{8} + 4 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi - 3 \sin^2 \varphi \cos \varphi + \frac{1}{8} \cos 4\varphi \right) d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{15}{8} d\varphi + 4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d\varphi + \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2\varphi d\varphi - 3 \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi d \sin \varphi + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{32} \int_{-\pi}^{\pi} \cos 4\varphi d\varphi \right) = \frac{2}{9\pi} \left[\frac{15}{8} \varphi + 4 \sin \varphi + \sin 2\varphi - \sin^3 \varphi + \frac{1}{32} \sin 4\varphi \right]_{-\pi}^{\pi} = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \left(\frac{15}{8} \pi + \frac{15}{8} \pi \right) = \frac{2}{9\pi} \cdot \frac{30}{8} \pi = \frac{5}{6}; \\
 y_C &= \frac{1}{S} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \int_{r=0}^{1+\cos \varphi} r \sin \varphi r dr d\varphi = \frac{2}{3\pi} \int_{\varphi=-\pi}^{\pi} \frac{r^3}{3} \sin \varphi \Big|_0^{1+\cos \varphi} d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 3 \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + \cos^3 \varphi) \times \\
 &\times \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[1 + 3 \cos \varphi + 3 \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) + (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \right] \times \\
 &\times \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin \varphi + 3 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi + \right. \\
 &+ \left. \frac{3}{2} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi \cos \varphi \right] d\varphi = \\
 &= \frac{2}{9\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{5}{2} \sin \varphi + 4 \cos \varphi \sin \varphi + \frac{3}{2} \cos^2 \varphi \sin \varphi - \frac{3}{2} \sin^3 \varphi - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\sin^3 \varphi \cos \varphi) d\varphi = \frac{2}{9\pi} \left[\frac{5}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin \varphi d\varphi - 4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos \varphi d \cos \varphi - \right. \\
 & \left. - \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d \cos \varphi - \frac{3}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi - \int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 \varphi d \sin \varphi \right] = \\
 & = \frac{2}{9\pi} \left[-\frac{5}{2} \cos \varphi - 2 \cos^2 \varphi - \frac{1}{2} \cos^3 \varphi - \frac{3}{2} \left(-\cos \varphi + \frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{4} \sin^4 \varphi \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{9\pi} \left(\frac{5}{2} - 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 0 - \frac{5}{2} + 2 - \frac{1}{2} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{2}{9\pi} \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Итак, координаты центра тяжести $x_c = \frac{5}{6}$; $y_c = 0$.

§ 7. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Моментом инерции материальной точки относительно оси называется произведение массы точки на квадрат ее расстояния до этой оси.

Моментом инерции материальной системы называется сумма моментов инерции точек этой системы.

Моменты инерции материальной плоской фигуры D , распределение массы которой характеризуется плотностью $\delta = \delta(x, y)$, определяются по формулам:

относительно оси Ox

$$I_x = \iint_D y^2 \delta(x, y) dx dy, \quad (20.20)$$

относительно оси Oy

$$I_y = \iint_D x^2 \delta(x, y) dx dy, \quad (20.21)$$

относительно начала координат

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \delta(x, y) dx dy. \quad (20.22)$$

Величина I_0 называется *полярным моментом инерции*. Очевидно, что $I_0 = I_x + I_y$.

Если плоская фигура D однородна и симметрична относительно оси абсцисс (ординат), то момент инерции I_x (I_y) равен удвоенному моменту инерции относительно оси Ox (оси Oy) половины этой фигуры, расположенной по одну сторону от оси абсцисс (ординат).

Пример 1. Определить моменты инерции I_x , I_y и I_o фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и $y = x^2$ (рис. 20.16), если плотность в каждой точке численно равна ее ординате, т. е. $\delta = y$.

Решение. Момент инерции относительно оси абсцисс

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^3 dx dy = \\ &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x-x^2} y^3 dy = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 [(2x-x^2)^4 - x^8] dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (16x^4 - 32x^5 + \\ &\quad + 24x^6 - 8x^7) dx = \\ &= 2 \left[\frac{2x^5}{5} - \frac{2x^6}{3} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3x^7}{7} - \frac{x^8}{8} \right]_0^1 = \frac{31}{420} \text{ ед}^4. \end{aligned}$$

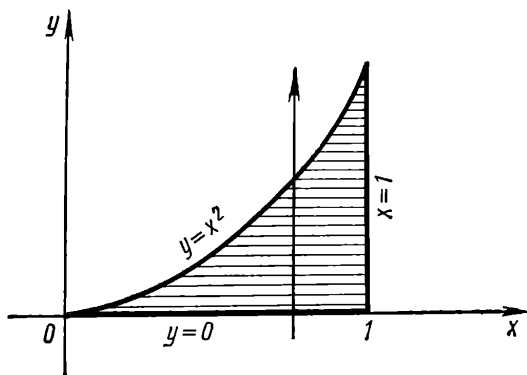


Рис. 20.17

Момент инерции относительно оси ординат

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_D x^2 y dx dy = \int_0^1 x^2 dx \int_{x^2}^{2x-x^2} y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 [(2x-x^2)^2 - x^4] dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (4x^4 - 4x^5) dx = 2 \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{15} \text{ ед}^4. \end{aligned}$$

Полярный момент инерции

$$I_o = I_x + I_y = \frac{31}{420} + \frac{1}{15} = \frac{59}{420} \text{ ед}^4.$$

Пример 2. Найти момент инерции относительно оси Ox плоской однородной фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $y = 0$, (рис. 20.17).

Решение. В этом случае $\delta = 1$ и тогда искомый момент инерции

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_D y^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} y^2 dy = \int_0^1 dx \frac{y^3}{3} \Big|_0^{x^2} = \frac{1}{3} \int_0^1 x^6 dx = \\ &= \frac{1}{3} \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{21} \text{ ед}^4. \end{aligned}$$

Упражнения

1. Найти статический момент однородного круга радиуса R относительно касательной.

Отв. πR^3 куб. ед.

2. Найти центр тяжести четверти круга $x^2 + y^2 \leq r^2$.

Отв. $x_C = y_C = \frac{4r}{3\pi}$.

3. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = x^2 - x^4$.

Отв. $x_C = \frac{3\pi}{16}$; $y_C = 0$.

4. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной четвертью окружности $x = 1 - \sqrt{1 - y^2}$, прямой $x + y = 2$ и осью Ox , если плотность в каждой точке пропорциональна абсциссе (коэффициент пропорциональности равен k).

Отв. $x_C = \frac{3(4 + 5\pi)k}{4(4 + 3\pi)} \approx 1,1k$; $y_C = \frac{5k}{4 + 3\pi} \approx 0,37k$.

5. Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной замкнутой кривой $y^2 = ax^3 - x^4$.

Отв. $x_C = \frac{5}{8}a$; $y_C = 0$.

6. Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$ при $0 \leq x \leq \pi$.

Отв. $x_C = \pi/2$; $y_C = \pi/8$.

7. Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линией $x^{1/2} + y^{1/2} = a^{1/2}$ и координатными осями.

Отв. $x_C = y_C = 9/5$.

8. Найти центр тяжести сегмента эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ограниченного прямой $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Отв. $x_C = \frac{4}{3(\pi - 2)}a$; $y_C = \frac{4}{3(\pi - 2)}b$.

9. Найти центр тяжести площади, ограниченной окружностями $r = a \cos \varphi$, $r = b \cos \varphi$ ($b > a$).

Отв. $x_C = \frac{4\pi(b^3 - a^3)}{8\pi(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{2(a + b)}$; $y_C = 0$.

10. Найти центр тяжести однородной усеченной призмы, ограниченной координатными плоскостями и плоскостями $x + y + z = 4$, $x = 1$, $y = 1$.

Отв. $x_C = y_C = 17/36$; $z_C = 55/36$.

11. Найти полярный момент инерции I_0 относительно вершины равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h , считая плотность $\delta = 1$.

Отв. $I_0 = \frac{ah}{48}(a^2 + 12h^2)$ ед⁴.

12. Найти момент инерции I_x относительно основания равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h , считая плотность в каждой точке совпадающей с ее расстоянием от основания треугольника.

Отв. $I_x = \frac{ah^4}{20}$.

13. Найти момент инерции относительно оси Ox плоского тела, имеющего форму сегмента параболы $y = x^2$, ограниченного прямой $y = 1$. Плотность $\rho = 1$.

Отв. $I_x = 4/7$.

ТРОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть в пространстве задана ограниченная замкнутой поверхностью область V , объем которой равен v (рис. 21.1). Зададим в этой области непрерывную функцию трех переменных $f(x, y, z)$. Разобьем данную область на n элементарных объемов Δv_i любой формы. В каждом элементарном объеме выберем по произвольной точке $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ и вычислим значение плотности тела в точке $f(M_i)$, а также произведения $f(M_i) \Delta v_i$, т. е. массы элементарных объемов.

Составим трехмерную интегральную сумму

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta v_i &= \\ = \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i, \quad (21.1) \end{aligned}$$

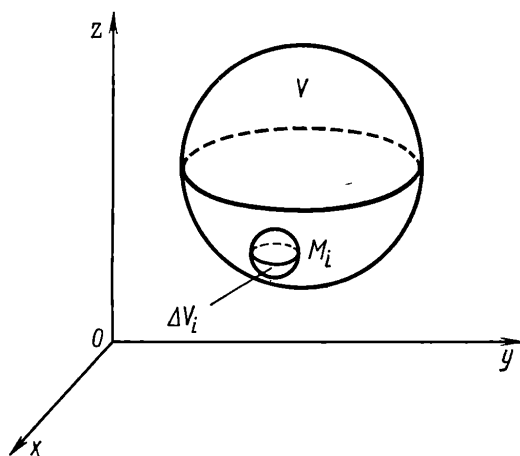


Рис. 21.1

определяющую массу ступенчатого тела. Предел этой интегральной суммы, когда наибольший из диаметров элементарных объемов Δv_i стремится к нулю, а число n элементарных объемов неограниченно возрастает, называется *тройным интегралом* от функции $f(M)$ по области V и обозначается

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i. \quad (21.2)$$

Итак, предел трехмерной интегральной суммы в области V , не зависящий от способа разбиения V на частичные области и от выбора точек в частичных областях, при неограниченном увеличении числа частичных областей n и беспредельном уменьшении наибольшего из их диаметров, называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области V .

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Согласно определению тройного интеграла, при $f(M) = f(x, y, z) = 1$ имеем

$$\iiint_V dv = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta v_i.$$

Правая часть этого равенства представляет объем тела v . Следовательно, объем тела

$$v = \iiint_V dv = \iiint_V dx dy dz. \quad (21.3)$$

Таким образом, если $f(M) = 1$, то тройной интеграл $\iiint_V dv = v$ численно равен объему области V .

Рассмотрим неоднородное тело, объем которого равен v , а плотность $\delta = \delta(x, y, z)$ изменяется в каждой его точке M_i . Тогда, разбивая тело на n элементов, получаем массу некоторого i -го элемента

$$\Delta m_i \approx \delta(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i,$$

где $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$ — произвольная точка i -го элемента; Δv_i — объем i -го элемента. Масса всего тела

$$m = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \delta(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i,$$

т. е.

$$m = \iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz. \quad (21.4)$$

Следовательно, масса тела равна тройному интегралу от его плотности δ — в этом физический смысл тройного интеграла.

§ 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Для тройного интеграла справедливы свойства, аналогичные доказанным свойствам двойного интеграла.

Свойство 1. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла:

$$\iiint_V cf dv = c \iiint_V f dv. \quad (21.5)$$

Свойство 2. Тройной интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от слагаемых:

$$\iiint_V (f \pm \dots \pm \Phi) dv = \iiint_V f dv \pm \dots \pm \iiint_V \Phi dv. \quad (21.6)$$

Свойство 3. Если подынтегральная функция в области интегрирования не меняет знак, то тройной интеграл есть число того же знака, что и подынтегральная функция.

Свойство 4. Если область интегрирования V разбита на n частей $V_1, V_2, \dots, V_n$, то тройной интеграл по всей области равен сумме тройных интегралов по этим ее частям:

$$\iiint_V f dv = \iiint_{V_1} f dv + \iiint_{V_2} f dv + \dots + \iiint_{V_n} f dv. \quad (21.7)$$

Свойство 5 (об оценке тройного интеграла). Если m и $\bar{M}$ соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(M)$ в области V , т. е.

$$m \leq f(M) \leq \bar{M},$$

то имеет место оценка

$$mv \leq \iiint_V f(M) dv = \iiint_V f(x, y, z) dv \leq \bar{M}v. \quad (21.8)$$

Свойство 6 (теорема о среднем). Тройной интеграл от непрерывной функции равен произведению значения этой функции в некоторой средней точке ξ области на объем этой области, т. е.

$$\iiint_V f dv = f(\xi)v. \quad (21.9)$$

§ 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА ПУТЕМ СВЕДЕНИЯ К ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМУ ТРЕХКРАТНОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ

Вычислим в декартовой системе координат тройной интеграл

$$\iiint_V f(x, y, z) dv.$$

При составлении трехмерной интегральной суммы разобьем область интегрирования V на частичные области плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда частичными областями будут параллелепипеды объема $\Delta v_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$ и элементы, прилегающие к поверхности тела V , сумма объемов которых беспрестанно уменьшается с уменьшением диаметров частичных областей. Таким образом, можно считать

$$dv = dx dy dz. \quad (21.10)$$

Предположим, что любая прямая, параллельная координатным осям, пересекает поверхность, ограничивающую область интегрирования V , не более чем в двух точках. В противном случае разобьем область V на части $V_1, V_2, \dots, V_s$, для которых данное предположение выполняется, и воспользуемся тем, что тройной интеграл по области V равен сумме тройных интегралов по частичным областям $V_1, V_2, \dots, V_s$.

Опишем около области V (рис. 21.2) цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz , которая касается поверхности тела V по некоторой линии L . Пусть $z = f_1(x, y)$ и $z = f_2(x, y)$ (f_1 и f_2 — однозначные функции) — уравнения поверхностей, расположенных соответственно ниже и выше линии L ; D — проекция тела V на плоскость xOy .

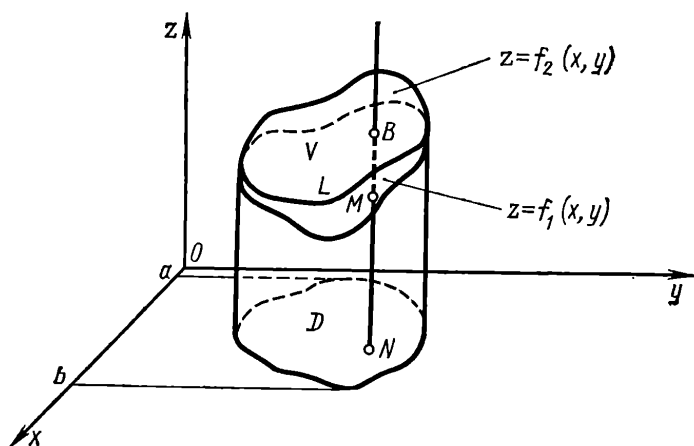


Рис. 21.2

Разобьем область D на n частичных областей $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ и выберем в каждой из них по произвольной точке $N_1(\xi_1; \eta_1), N_2(\xi_2; \eta_2), \dots, N_n(\xi_n; \eta_n)$. Через границы этих областей проведем цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси Oz . Таким образом, тело V разобьется на n элементарных цилиндров. Если, кроме того, пересечь тело V близко расположенными плоскостями, параллельными плоскости xOy , то каждый из элементарных цилиндров дополнительно разобьется на части.

Пусть цилиндр с площадью основания $\Delta\sigma_i$ разбивается на k_i частей с высотами $\Delta z_1, \Delta z_2, \dots, \Delta z_{k_i}$. Выберем в каждой такой части по точке $M(\xi_i; \eta_i; \zeta_j)$, расположенной на прямой, перпендикулярной к плоскости xOy и проходящей через соответствующую точку $N_i(\xi_i, \eta_i)$. Тогда трехмерная интегральная сумма представляется в виде

$$\sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_i; \eta_i; \zeta_j) \Delta z_j. \quad (21.11)$$

Сначала производим суммирование по индексу j от 1 до k_i , а затем полученные выражения суммируем по i от 1 до n . Проведем внутреннее суммирование и устремим Δz_j к нулю. Пределом этой суммы является определенный интеграл по переменной z в пределах от $z = f_1(\xi_i, \eta_i)$ до $z = f_2(\xi_i, \eta_i)$:

$$\lim_{\Delta z_j \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \sum_{j=1}^{k_i} f(\xi_i; \eta_i; \zeta_j) \Delta z_j = \sum_{i=1}^n \Delta\sigma_i \int_{f_1(\xi_i, \eta_i)}^{f_2(\xi_i, \eta_i)} f(\xi_i, \eta_i, z) dz. \quad (21.12)$$

Сумму в правой части равенства можно рассматривать как двумерную интегральную сумму функции двух переменных x и y в области D :

$$F(x, y) = \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (21.13)$$

Для получения тройного интеграла надо перейти еще раз к пределу, т. е.

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i \int_{f_1(\xi_i, \eta_i)}^{f_2(\xi_i, \eta_i)} f(\xi_i, \eta_i, z) dz. \quad (21.14)$$

Так как предел двумерной интегральной суммы (21.12) есть двойной интеграл от функции (21.13) по области D , то

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iint_D d\sigma \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (21.15)$$

Итак, вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению определенного интеграла от подынтегральной функции по одной из переменных при произвольных фиксированных значениях двух других и вычислению двойного интеграла от полученной функции.

Двойной интеграл в правой части равенства (21.15) вычисляем с помощью двукратного интеграла.

Заменяя $dv = dx dy dz$, получаем формулу для вычисления тройного интеграла с помощью трехкратного интеграла:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (21.16)$$

При изменении порядка интегрирования получаем аналогичные формулы.

Если областью интегрирования V является прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям, то все пределы в трехкратном интеграле (21.16) постоянны.

Если функция $f(x, y, z)$ определена в прямоугольной области V , ограниченной плоскостями $x=a$, $x=b$, $y=c$, $y=d$, $z=e$, $z=g$, то тройной интеграл, распространенный по области V , вычисляется по формуле

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^g f(x, y, z) dz. \quad (21.17)$$

Пример 1. Свести тройной интеграл $I = \iiint f(x, y, z) dx dy dz$

к трехкратному, если область V лежит в I октанте и ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 = z^2$ (рис. 21.3).

Решение. Находим область интегрирования D , для чего решим совместно уравнения параболоида и конуса: $z^2 - 2z = 0$, $z = 0$, $z = 2$. Тогда уравнение контура области имеет вид $x^2 + y^2 = 4$.

Таким образом,

$$I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D d\sigma \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dz = \\ = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{(x^2+y^2)/2}^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x, y, z) dz.$$

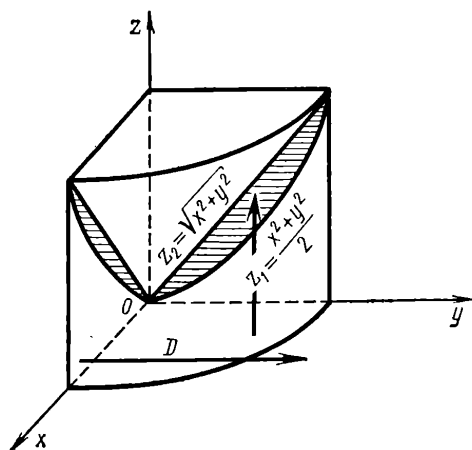


Рис. 21.3

Пример 2. С помощью тройного интеграла найти объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + y^2 = 6$, $z = x^2/4$ и плоскостью $z = 0$ (рис. 21.4).

Решение. Тело симметрично относительно координатных плоскостей yOz и xOz . Поэтому можно вычислить четверть объема.

В плоскости xOy областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \leq 6$. В I октанте нижний предел по x есть 0, верхний $\sqrt{6}$; нижний предел по y есть 0, верхний $y = \sqrt{6 - x^2}$; нижний предел по z есть 0, верхний $z = x^2/4$. Имеем

$$\frac{V}{4} = \int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt{6-x^2}} dy \int_0^{x^2/4} dz = \int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt{6-x^2}} dy \cdot z \Big|_0^{x^2/4} = \int_0^{\sqrt{6}} dx \int_0^{\sqrt{6-x^2}} \frac{x^2}{4} dy = \\ = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{6}} x^2 y \Big|_0^{\sqrt{6-x^2}} dx = \frac{1}{4} \int_0^{\sqrt{6}} x^2 \sqrt{6-x^2} dx,$$

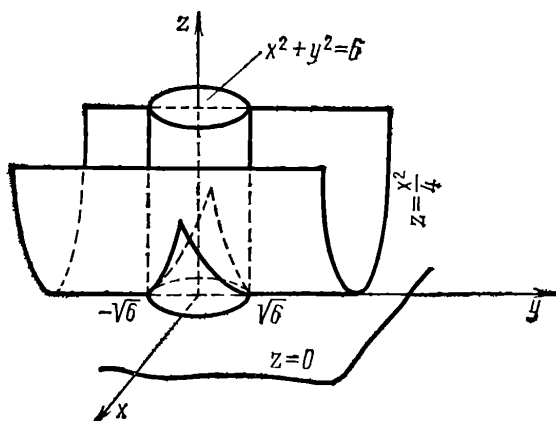


Рис. 21.4

откуда

$$V = \int_0^{\sqrt{6}} x^2 \sqrt{6-x^2} dx.$$

Сделаем замену $x = \sqrt{6} \sin \varphi$; $dx = \sqrt{6} \cos \varphi d\varphi$. При $x=0$ новый нижний предел интегрирования $\varphi=0$, так как тогда $0 = \sqrt{6} \sin \varphi$, или $\sin \varphi = 0$, т. е. $\varphi = \arcsin 0 = 0$. При $x = \sqrt{6}$ новый верхний предел интегрирования $\varphi = \pi/2$, так как в этом случае $\sqrt{6} = \sqrt{6} \sin \varphi$, т. е. $\sin \varphi = 1$, откуда

$$\varphi = \arcsin 1 = \pi/2.$$

В результате замены переменных получаем

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} 6 \sin^2 \varphi \sqrt{6-6 \sin^2 \varphi} \sqrt{6} \cos \varphi d\varphi = 36 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= 9 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi = 9 \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi - \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \cos 4\varphi d(4\varphi) = \\ &= \frac{9}{2} \varphi \Big|_0^{\pi/2} - \frac{9}{8} \sin 4\varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{9}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{9}{8} (\sin \pi - \sin 0) = \frac{9}{4} \pi \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

§ 5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Наряду с декартовыми координатами часто применяются цилиндрические координаты. Цилиндрическая система координат — аналог полярной в пространстве: к двум плоским координатам ρ и φ добавляется третья — аппликата z . Формулы перехода к цилиндрическим координатам $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ (рис. 21.5). Переменные φ , ρ , z изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi);$$

$$f_1(\varphi, \rho) \leq z \leq f_2(\varphi, \rho).$$

Координатной поверхностью в пространственной системе координат называется поверхность, при перемещении по которой одна из координат остается постоянной, а две другие изменяются. Координатными поверхностями в этой системе являются: $\rho = \text{const}$ — круговые цилиндры, геометрическая ось которых совпадает с осью Oz ; $\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, выходящие из оси Oz ; $z = \text{const}$ — плоскости, параллельные плоскости xOy .

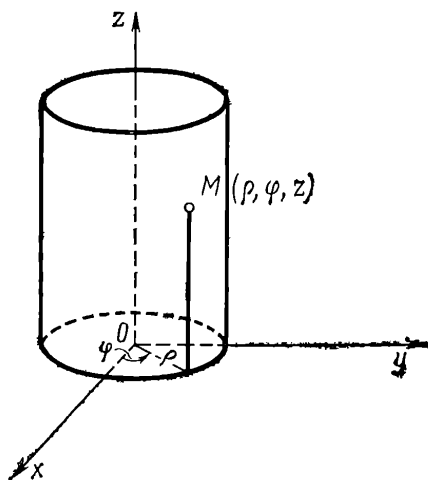


Рис. 21.5

Элементарный объем dv ограничен тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей: ρ и $\rho + d\rho$, φ и $\varphi + d\varphi$, z и $z + dz$ (рис. 21.6). Его можно приближенно считать прямоугольным параллелепипедом с измерениями $d\rho$, $\rho d\varphi$ и dz , т. е.

$$dv = \rho d\rho d\varphi dz.$$

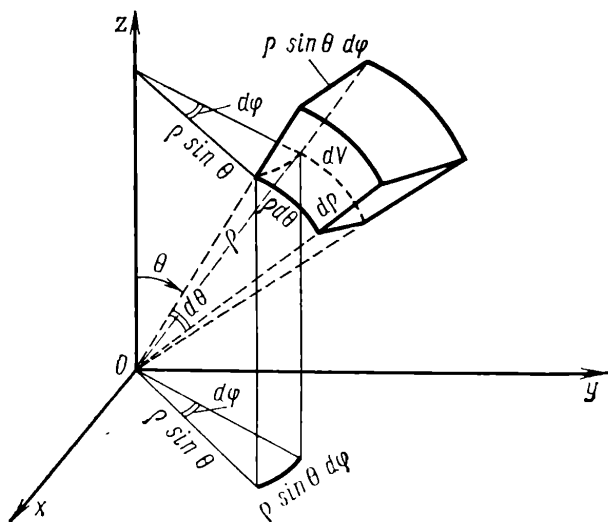


Рис. 21.6

Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz, \quad (21.18)$$

где $F(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z)$. При этом уравнения поверхностей тела V преобразуются к цилиндрическим координатам.

Для вычисления тройного интеграла в цилиндрических координатах надо тройной интеграл представить в виде трехкратного интеграла. Имеем

$$\iiint_V F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho, \varphi)}^{z_2(\rho, \varphi)} F(\rho, \varphi, z) dz, \quad (21.19)$$

где $z = z_1(\rho, \varphi)$ и $z = z_2(\rho, \varphi)$ — уравнения частей поверхности тела V , расположенных соответственно ниже и выше линии L .

Если областью интегрирования V является внутренность кругового цилиндра, радиус основания которого R , высота H , центр основания совпадает с началом координат и образующие параллельны оси Oz , то равенство (21.19) принимает вид

$$\iiint_V F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho d\rho \int_0^H F(\rho, \varphi, z) dz, \quad (21.20)$$

т. е. все пределы трехкратного интеграла постоянны.

Пример 1. Вычислить тройной интеграл $I = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$,

если областью интегрирования V является цилиндр, ограниченный поверхностями $x^2 + y^2 = R^2$, $z = 0$, $z = H$ (рис. 21.7).

Решение. Переходим к цилиндрическим координатам: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$. Тогда $x^2 + y^2 = \rho^2$ — подынтегральная функция, а область D имеет уравнение $\rho = R$. Симметрия области V — двойная

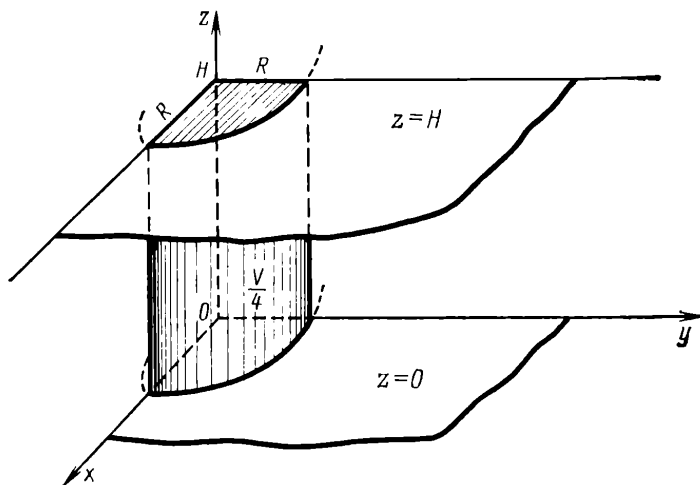


Рис. 21.7

(относительно плоскостей yOz и xOz), поэтому возьмем учетверенный тройной интеграл по области $V/4$:

$$I = 4 \iiint_{V/4} \rho^2 \rho d\rho d\varphi dz = 4 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^H dz = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot H = \frac{\pi R^4 H}{2}.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, где область V ограничена параболоидом вращения $x^2 + y^2 = 2z + 3$ и плоскостью xOy (рис. 21.8).

Решение. Преобразуем к цилиндрическим координатам подынтегральное выражение и уравнение параболоида. Так как проекция области V на плоскость xOy есть круг радиуса $\sqrt{3}$, то

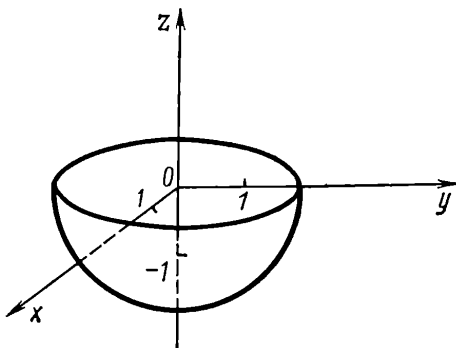


Рис. 21.8

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho^2 d\rho d\varphi dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 d\rho \int_0^0 \frac{1}{2} (\rho^2 - 3) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 (3 - \rho^2) d\rho = \frac{1}{2} \left[\rho^3 - \frac{\rho^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{6\sqrt{3}}{5} \pi. \end{aligned}$$

§ 6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Положение точки M пространства в сферической системе координат определяется координатами ρ , φ , θ , где ρ —длина радиуса-вектора

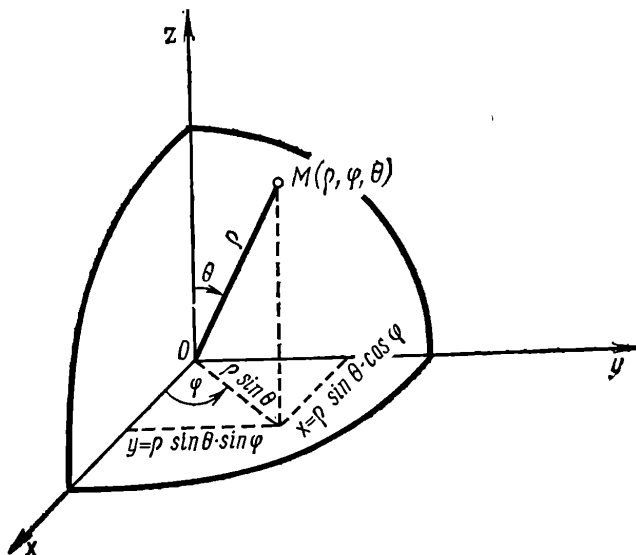


Рис. 21.9

точки M ($0 \leq \rho < \infty$), φ —долгота ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), θ —дополнение до широты ($0 \leq \theta \leq \pi$) (рис. 21.9).

Формулы перехода от прямоугольных декартовых координат к сферическим имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta; \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta; \quad z = \rho \cos \theta.$$

Координатными поверхностями в этой системе являются: $\rho = \text{const}$ —сферы с центром в начале координат; $\varphi = \text{const}$ —полуплоскости, выходящие из оси Oz ; $\theta = \text{const}$ —конусы с вершиной в начале координат и геометрической осью, совпадающей с осью Oz .

Элементарный объем ограничен тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей: ρ и $\rho + d\rho$; φ и $\varphi + d\varphi$, θ и $\theta + d\theta$ (рис. 21.10). Этот объем приближенно можно считать прямоугольным параллелепипедом с измерениями: $d\rho$, $\rho d\theta$ и $\rho \sin \theta d\varphi$, откуда

$$dv = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Тогда

$$\iiint_V f(M) dv = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V F(\rho, \varphi, \theta) \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta. \quad (21.21)$$

Уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в сферической системе координат имеет вид $\rho = R$.

Если область V ограничена сферической поверхностью, то после

перехода к трехкратному интегралу пределы всех трех определенных интегралов будут постоянными.

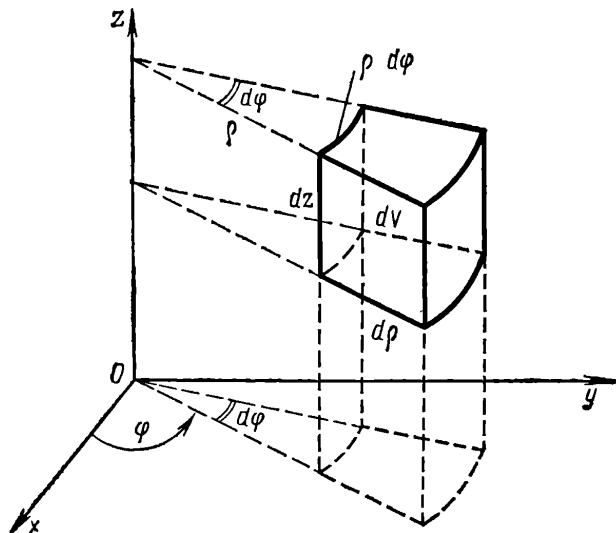


Рис. 21.10

Пример 1. Вычислить тройной интеграл

$$I = \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz,$$

если область V ограничена полусферой $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$.

Решение. Преобразуем к сферическим координатам подынтегральную функцию и уравнение сферы. Поскольку $x = \rho \cos \varphi \sin \theta$, $y = \rho \sin \varphi \sin \theta$, $z = \rho \cos \theta$, получаем

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \rho^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \rho^2 \cos^2 \theta = \\ &= \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \rho^2, \end{aligned}$$

откуда

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho,$$

а уравнение данной сферы имеет вид $\rho = 3$.

Найдем пределы интегрирования. Очевидно, в области V величина φ изменяется от 0 до 2π , θ — от 0 до $\pi/2$, ρ — от 0 до 3. В силу симметрии области V найдем учетверенный тройной интеграл по области $V/4$.

Используя формулу (21.21), получаем

$$\begin{aligned} I &= 4 \iiint_{V/4} \rho \cdot \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_0^3 \rho^3 \, d\rho = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3^4}{4} = 40,5 \pi. \end{aligned}$$

Пример. 2. Вычислить объем тела, определяемого неравенствами $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$ (рис. 21.11).

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Уравнения поверхностей, ограничивающих объем тела, имеют вид $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\rho = 1$.

Найдем пределы интегрирования. Если $y = 0$, то $\rho \sin \varphi \sin \theta = 0$, откуда $\sin \varphi = 0$, $\sin \theta = 0$, т. е. нижние пределы у интегралов по φ и θ равны нулю.

Если $y = x/\sqrt{3}$, то $\rho \sin \varphi \times \sin \theta = (\rho \cos \varphi \sin \theta)/\sqrt{3}$, откуда $\operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3}$, т. е. $\varphi = \pi/6$ (верхний предел).

Тело симметрично относительно плоскости xOy (переменная z в квадрате). Интегрируем по I октанту:

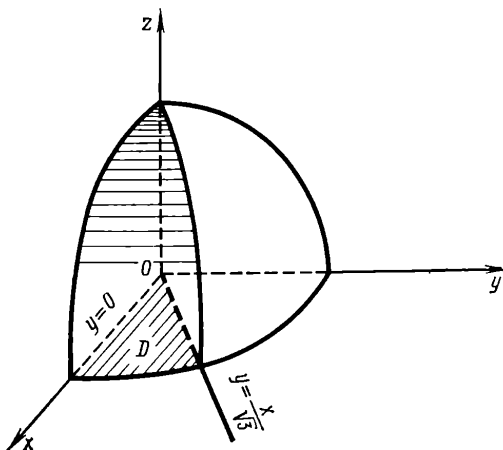


Рис. 21.11

$$\begin{aligned} V &= 2 \iiint_{V/2} dv = 2 \iiint_{V/2} \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi d\theta = \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = 2 \frac{\pi}{6} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{9} \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

Упражнения

Вычислить трехкратные интегралы:

1. $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} y dy \int_{1-x}^{2-2x} dz.$

Отв. $1/12.$

2. $\int_0^a y dy \int_0^h dx \int_0^{a-y} dz.$

Отв. $\frac{a^3 h}{6}.$

3. $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y-y^2}}^2 x dx \int_0^3 z^2 dz.$

Отв. 30.

4. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V \frac{dx dy dz}{1-x-y}$, где V — тело, ограниченное плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=2$, $y=5$, $z=2$, $z=4$.

Отв. $10 \ln \frac{4}{5}$.

5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (2x+3y-z) dx dy dz$, где V — призма, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=3$, $x+y=2$.

Отв. 11.

6. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V xyz dx dy dz$, где V — тело, ограниченное цилиндром $x^2+y^2=4$ и плоскостями $x+y+z=3$ и $z=0$.

Отв. $8\pi/3$.

7. Преобразованием к цилиндрическим координатам вычислить

$$\iiint_V \frac{z \ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1} dx dy dz,$$

где V — верхняя половина шара, ограниченная сферой $x^2+y^2+z^2=1$ и плоскостью xOy .

Отв. $\frac{\pi}{2} \left[2 \ln 2 - 1 - \frac{1}{2} \ln^2 2 \right] \approx 0,07\pi$.

8. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $z=4-y^2$, $z=y^2+2$ и плоскостями $x=-1$, $x=2$.

Отв. 8 куб. ед.

9. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $z=6-x^2-y^2$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ при $z \geq 0$.

Отв. $\frac{32}{3} \pi$ куб. ед.

10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$.

Отв. $1/2$ куб. ед.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

§ 1. ОБЪЕМ ТЕЛА

Вычисление объема тела в декартовых координатах. Если тело V ограничено поверхностями $z_1 = f_1(x, y)$; $z_2 = f_2(x, y)$ ($z_2 > z_1$) и проек-

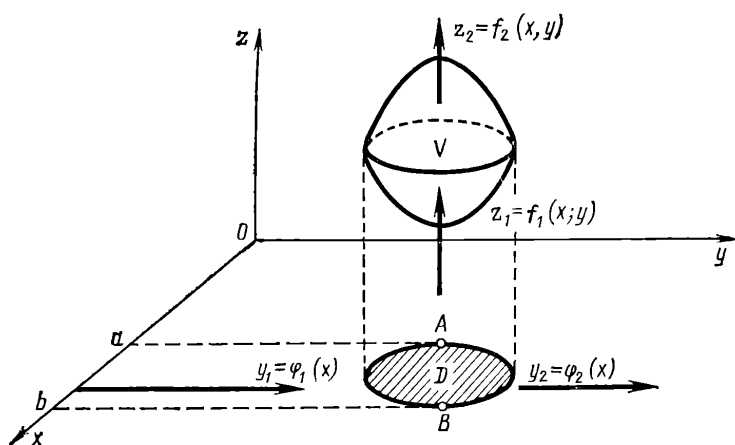


Рис. 22.1

тируется на плоскость xOy в область D , ограниченную кривыми $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$ ($y_2 > y_1$) и прямыми $x = a$, $x = b$ ($b > a$) (рис. 22.1), то объем тела

$$v = \iiint_V dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} dy \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} dz. \quad (22.1)$$

Порядок интегрирования можно изменять (рис. 22.2).

Пример 1. Вычислить объем v тела, ограниченного параболическим цилиндром $2z = y^2$ и плоскостями $2x + 3y = 12$, $x = 0$ и $z = 0$ (рис. 22.3).

Решение. Тело расположено в I октанте, ограничено плоскостью xOy , параболическим цилиндром и плоскостью $2x + 3y = 12$, параллельной оси Oz . Проекция тела на плоскость xOy есть прямоугольный треугольник, ограниченный осями координат и прямой

$2x + 3y = 12$. По формуле (22.1) искомый объем

$$\begin{aligned}
 v &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^6 dx \int_0^{\frac{2(6-x)}{3}} dy \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^6 dx \int_0^{\frac{2(6-x)}{3}} y^2 dy = \frac{4}{81} \int_0^6 (6-x)^3 dx = -\frac{(6-x)^4}{81} \Big|_0^6 = 16 \text{ куб. ед.}
 \end{aligned}$$

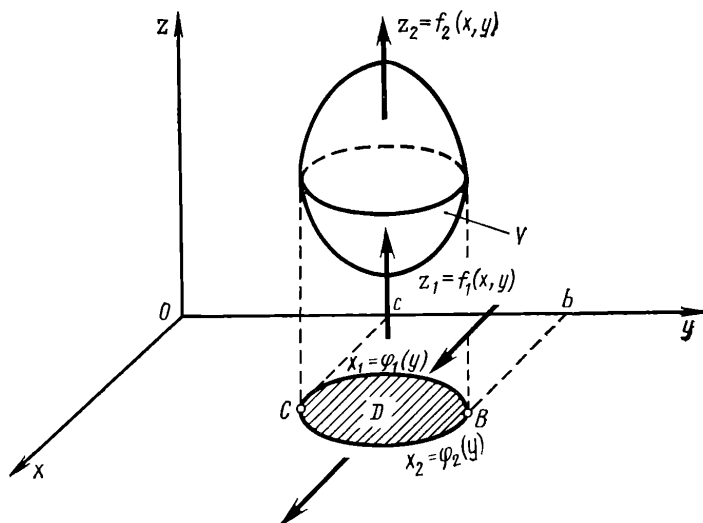


Рис. 22.2

Пример 2. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 = 2y$, $z = 4 - y^2$ и плоскостями $x = 0$, $z = 0$ (рис. 22.4).

Решение. Область интегрирования D , лежащая в плоскости xOy , ограничена прямыми $x = 0$, $y = 2$ и кривой $x = -\sqrt{2y}$. Переменная z изменяется от $z_1 = 0$ до $z_2 = 4 - y^2$. Поэтому $0 \leq y \leq 2$; $-\sqrt{2y} \leq x \leq 0$; $0 \leq z \leq 4 - y^2$.

По формуле (22.1) искомый объем

$$\begin{aligned}
 v &= \iiint_V dx dy dz = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^0 dx \int_0^{4-y^2} dz = \\
 &= \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^0 [z]_0^{4-y^2} dx = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{2y}}^0 (4 - y^2) dz = \\
 &= \int_0^2 \left[4x - y^2 x \right]_{-\sqrt{2y}}^0 dy = \int_0^2 (4\sqrt{2}\sqrt{y} - \sqrt{2}\sqrt{y}^5) dy = \frac{128}{21} \text{ куб. ед.}
 \end{aligned}$$

Вычисление объема тела в цилиндрических координатах. Объем тела в цилиндрических координатах

$$v = \iiint_V \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\rho=\rho(\varphi)} \rho \, d\rho \int_{z=f_1(\varphi, \rho)}^{z=f_2(\varphi, \rho)} dz. \quad (22.2)$$

Пример 3. Вычислить объем v тела, ограниченного параболоидом вращения $x^2 + y^2 - z = 1$ и плоскостью $z = 1$ (рис. 22.5).

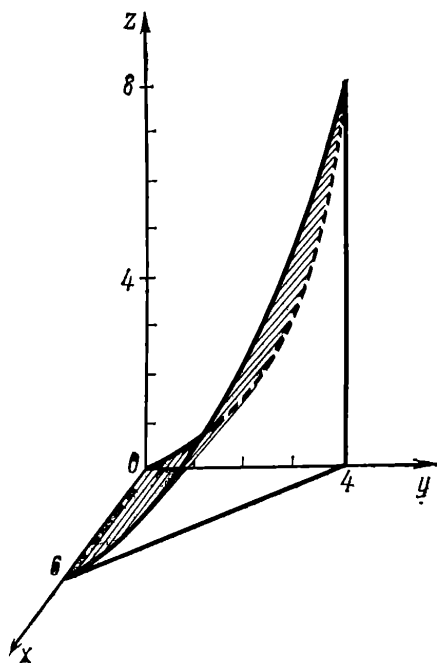


Рис. 22.3

Решение. Уравнение параболоида вращения в цилиндрических координатах $\rho^2 - z = 1$ или $z = \rho^2 - 1$. Проекция тела на плоскость xOy есть круг с центром в начале координат и радиусом, равным $\sqrt{2}$.

По формуле (22.2) искомый объем

$$\begin{aligned} v &= \iiint_V \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_{\rho^2-1}^1 dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho (1 - \rho^2 + 1) d\rho = \\ &= \left[\rho^2 - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi \approx 6,28 \text{ куб. ед.} \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + z^2 = 2$ и плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (рис. 22.6).

Решение. Вводим цилиндрические координаты: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$ и в результате уравнения поверхностей преобразуются к виду $\rho^2 = 2$ и $\rho^2 \cos^2 \varphi + z^2 = 2$. Отсюда пределы изменения переменных:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}; \quad 0 \leq z \leq \sqrt{2 - \rho^2 \cos^2 \varphi}.$$

Искомый объем

$$\begin{aligned} v &= \iiint_V \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_0^{\sqrt{2 - \rho^2 \cos^2 \varphi}} dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} [z]_0^{\sqrt{2 - \rho^2 \cos^2 \varphi}} \rho \, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \rho^2 \cos^2 \varphi} \rho \, d\rho = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{(2-\rho^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2} \cdot 2} \right]_0^{\sqrt{2}} d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(2-2\cos^2 \varphi)^{3/2} + 2^{3/2}] d\varphi = \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \varphi + 1) d\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(1-\cos^2 \varphi) \sin \varphi + 1] d\varphi = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{9} (3\pi + 4) \text{ куб. ед.}
 \end{aligned}$$

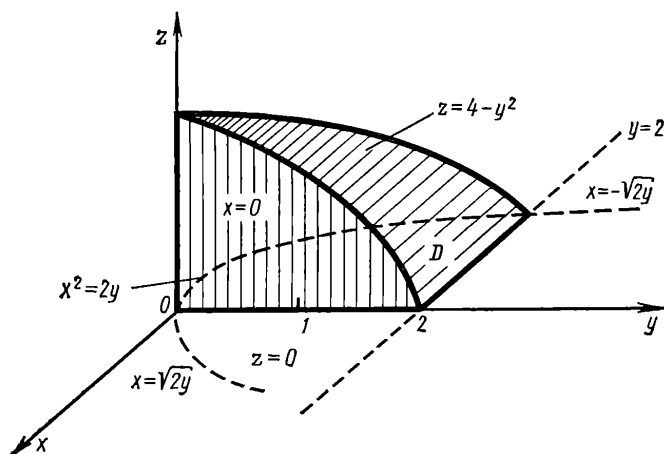


Рис. 22.4

Вычисление объема тела в сферических координатах. Объем тела в сферических координатах

$$\begin{aligned}
 v &= \iiint_V \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\rho=f(\varphi, \theta)} \rho^2 \, d\rho.
 \end{aligned}
 \tag{22.3}$$

Пример 5. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$.

Решение. Полагая $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$; $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$; $z = \rho \cos \theta$, преобразуем уравнение поверхности к виду $\rho = \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta$.

Определим пределы изменения для φ , θ и ρ . Так как левая часть

уравнения поверхности $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = xyz$ всегда положительна, то можно заключить, что заданная поверхность расположена в I, II,

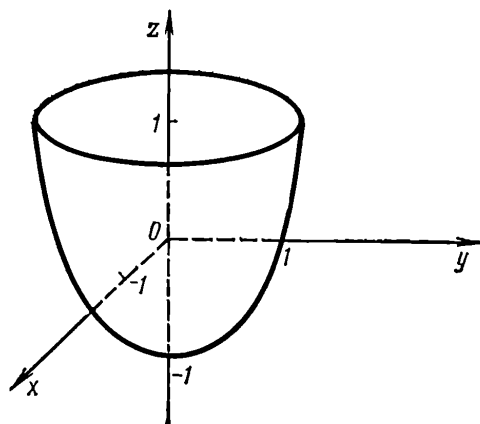


Рис. 22.5

III и IV октантах, где знаки координат x, y, z соответственно $(+, +, +)$, $(+, -, -)$, $(-, -, +)$ и $(-, +, -)$. Поэтому достаточно вычислить одну четвертую объема, а результат (в силу симметрии тела) умножить на четыре.

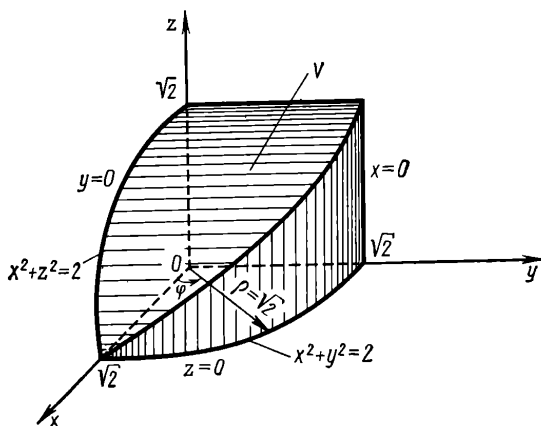


Рис. 22.6

В I октанте, где x, y, z имеют положительные значения, переменные φ, θ, ρ изменяются в следующих пределах:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \rho \leq \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta.$$

По формуле (22.3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{v}{4} &= \iiint_V \rho^2 \sin \theta \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta \int_0^{\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta} \rho^2 \, d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi \cos \theta} \sin \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^3 \varphi \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \cos^3 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{120 \cdot 12}. \end{aligned}$$

Итак, искомый объем $v = 1/360$ куб. ед.

Пример 6. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 z^4$.

Решение. Данная поверхность является замкнутой. Левая и правая части уравнения неотрицательны, следовательно, тело симметрично относительно любой из координатных плоскостей, поэтому

вычислим вначале восьмую часть объема. Воспользуемся сферическими координатами: $x = r \cos \varphi \sin \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$ и $z = r \cos \theta$. Уравнение заданной поверхности в сферических координатах имеет вид

$$r^6 = a^2 r^4 \cos^4 \theta.$$

Отсюда $r = 0$ и $r^2 = a^2 \cos^4 \theta$, $r = a \cos^2 \theta$. В I октанте угол φ изменяется в пределах $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$; угол θ в пределах $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Радиус-вектор r изменяется от 0 до $a \cos^2 \theta$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{v}{8} &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{a \cos^2 \theta} r^2 dr = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^{a \cos^2 \theta} d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} a^3 \frac{\cos^6 \theta \sin \theta}{3} d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi - \frac{\cos^7 \theta}{7} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{21} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{a^3}{21} \cdot \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Искомый объем $v = \frac{4}{21} \pi a^3$ куб. ед.

Упражнения

1. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y = 1$, $x + y = z$, $x + y = 2z$, $x = 0$, $y = 0$.

Отв. $\frac{1}{6}$ куб. ед.

2. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 = y$, $x^2 = 4 - 3y$ и плоскостями $z = 0$, $z = 9$.

Отв. 16 куб. ед.

3. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и расположенного внутри цилиндра.

Отв. $\frac{16}{9}(3\pi - 4) \approx 9,64$ куб. ед.

4. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $2 - z = x^2 + y^2$ и конусом $z^2 = x^2 + y^2$.

Отв. $\frac{5}{6} \pi$ куб. ед.

5. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $4z = x^2 + y^2$, цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$ и плоскостями $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

Отв. $\pi/2$ куб. ед.

6. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

Отв. $\frac{2\pi}{3}$ куб. ед.

7. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $x^2 + y^2 - z = 1$ и плоскостью $z = 0$.

Отв. $\pi/2$ куб. ед.

8. Вычислить объем тела, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$ и плоскостями $x + y = R \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Отв. $\frac{R^3}{12}(3\sqrt{2}\pi - 8)$ куб. ед.

С помощью тройного интеграла вычислить в цилиндрических координатах объемы тел, ограниченных поверхностями:

9. Параболоидом $x^2 + y^2 = 16 - 4z$, цилиндром $x^2 + y^2 = 4$ и поверхностью $z = 0$ (вне цилиндра).

Отв. 18π куб. ед.

10. Эллипсоидом $x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$.

Отв. $2\pi/3$ куб. ед.

11. Параболоидами $x^2 + y^2 = 6 - 2z$ и $z = x^2 + y^2$.

Отв. $9\pi/4$ куб. ед.

12. Цилиндром $x^2 + y^2 = 1$ и плоскостями $y + z = 1$, $z = 0$.

Отв. π куб. ед.

13. Параболоидом $x^2 + y^2 = 2z$ и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

Отв. $\frac{4}{3}\pi(8\sqrt{2}-7)$ куб. ед.

Вычислить объемы тел, ограниченных поверхностями:

14. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = a^2 y^2 z^2$.

Отв. $\frac{16}{105}a^3$ куб. ед.

15. $x^2 + y^2 = 4az$, $x^2 + y^2 = 2cx$ и плоскостью $z = 0$.

Отв. $\frac{3\pi c^4}{8a}$ куб. ед.

§ 2. МАССА ТЕЛА

Допустим, что известна плотность распределения массы $\delta(x, y, z)$ некоторого физического тела и надо найти его массу m .

Если тело однородное, то $\delta(x, y, z) = \delta = \text{const}$ и масса однородного тела $m = \delta v$, где v —объем тела.

Если тело неоднородное, то плотность δ меняется непрерывно от точки к точке, т. е. $\delta = \delta(x, y, z)$ —непрерывная функция.

Разобьем какой-либо системой поверхностей тело V на ячейки $V_1, V_2, \dots, V_n$ и обозначим через Δv_i объем i -й ячейки. Считая ячейки достаточно малыми, можно предположить, что они однородные и их масса Δm_i приближенно равна произведению объема Δv_i на плотность δ ячейки, вычисленную в какой-то точке $M_i(x_i; y_i; z_i)$, т. е.

$$\Delta m_i \approx \delta(x_i; y_i; z_i) \Delta v_i.$$

Тогда масса всего тела

$$m \approx \sum_{i=1}^n \delta(x_i; y_i; z_i) \Delta v_i.$$

Это приближение будет тем точнее, чем меньше ячейки. Обозначим через $d(v_i)$ диаметр i -й ячейки, т. е. наибольшую из хорд, соединяющих граничные точки этой ячейки, а символом $d(T)$ —наибольший из этих диаметров. Если $d(T)$ устремить к нулю, то все ячейки разбиения T стягиваются в точку и число их при этом увеличивается, а сумма стремится к точному значению массы:

$$m = \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \delta(x_i; y_i; z_i) \Delta v_i.$$

Если этот предел существует, то, как известно, он называется тройным интегралом от функции $\delta(x, y, z)$ по пространственной области V . Поэтому с помощью тройного интеграла вида

$$m = \iiint_V \delta(x, y, z) dz dy dx \quad (22.4)$$

можно вычислить всю массу неоднородного тела V .

Пример 1. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $z=a$ и цилиндрической поверхностью $y^2=2x-x^2$, в котором распределение плотности δ подчинено закону $\delta(x, y, z) = z\sqrt{x^2+y^2}$.
Решение. Масса тела

$$m = \iiint_V z \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx,$$

где V — пространство, занимаемое цилиндрическим телом (рис. 22.7). Введем цилиндрические координаты $x=r \cos \varphi$, $y=r \sin \varphi$, $z=z$. Переменная φ изменяется в пределах $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$, так как тело симметрично относительно координатной плоскости xOz . Нижний и верхний пределы интегрирования по переменной r найдем, подставив в уравнение окружности $y^2=2x-x^2$, или $x^2+y^2=2x$ вместо x и y полярные координаты $x=r \cos \varphi$ и $y=r \sin \varphi$. Тогда уравнение окружности имеет вид $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi$. Решаем это уравнение, преобразуя его к виду $r^2 = 2r \cos \varphi$, откуда $r^2 - 2r \cos \varphi = 0$ и $r(r - 2 \cos \varphi) = 0$. Отсюда $r=0$, $r=2 \cos \varphi$. Итак, нижний предел $r=0$; верхний $r=2 \cos \varphi$. Искомая масса тела

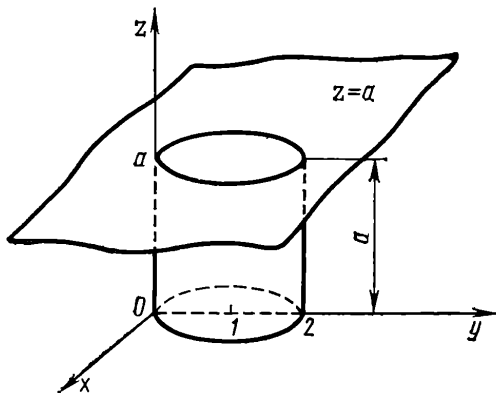


Рис. 22.7

$$\begin{aligned} m &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r dr \int_0^a z \sqrt{r^2} dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} \frac{z^2}{2} \Big|_0^a r^2 dr = \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi = \frac{8a^2}{9} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} a^2 \left[\sin \varphi - \frac{\sin^3 \varphi}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{4}{3} a^2 \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{9} a^2. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить массу шара радиуса $R=1$, если плотность δ в каждой его точке численно равна квадрату расстояния точки от центра шара.

Решение. Поместим начало координат в центре шара. В прямоугольных координатах уравнение сферы, ограничивающей шар, имеет вид $x^2+y^2+z^2=1$, в цилиндрических координатах — вид $\rho^2+z^2=1$. Соответственно плотность в каждой точке равна $\delta=x^2+y^2+z^2$, или $\delta=\rho^2+z^2$. По формуле (22.4)

$$m = \iiint_V (x^2+y^2+z^2) dx dy dz.$$

Переходим к цилиндрическим координатам и, учитывая симметрию шара, вычисляем массу восьмой части шара:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} m &= \iiint_V (\rho^2 + z^2) \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} (\rho^2 + z^2) \, dz = \\ &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 \sqrt{1-\rho^2} + \frac{1}{3} \sqrt{1-\rho^2}^3 \right) \rho \, d\rho. \end{aligned}$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(1-\rho^2-1) \sqrt{1-\rho^2} - \frac{1}{3} \sqrt{(1-\rho^2)^3} \right] d(1-\rho^2) &= \\ = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{3} (1-\rho^2)^{3/2} - (1-\rho^2)^{1/2} \right] d(1-\rho^2) &= \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{15} (1-\rho^2)^{5/2} - \frac{2}{3} (1-\rho^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Тогда $\frac{1}{8} m = \frac{1}{5} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{10}$, откуда $m = \frac{4}{5} \pi$.

§ 3. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И КООРДИНАТЫ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТЕЛА

Определение статических моментов и координат центра тяжести тел с помощью тройного интеграла производится аналогично тому, как это было сделано для двойного интеграла. Разница состоит лишь в том, что в трехмерной области плотность неоднородного тела есть функция не двух, а трех координат, т. е. $\delta = \delta(x, y, z)$, а интегрирование ведется не по плоской, а по пространственной области.

Центром тяжести тела называется точка, которая, если считать ее массу равной массе тела, имеет относительно координатных плоскостей статические моменты, равные соответствующим статическим моментам рассматриваемого тела. Следовательно,

$$mx_C = S_{yz}; \quad my_C = S_{xz}; \quad mz_C = S_{xy}, \quad (22.5)$$

где x_C, y_C, z_C — координаты центра тяжести; m — масса тела; S_{yz}, S_{xz} и S_{xy} — статические моменты тела относительно плоскостей yOz, xOz и xOy .

Выведем формулы для вычисления статических моментов. Считая приближенно массу i -го элемента сосредоточенной в некоторой его точке $M_i(\xi_i; \eta_i; \zeta_i)$, найдем статический момент этого элемента относительно плоскости yOz :

$$\Delta S_{yz_i} \approx \xi_i \Delta m_i \approx \xi_i \delta(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i.$$

Поэтому

$$S_{yz} = \lim_{\substack{d \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \xi_i \delta(\xi_i; \eta_i; \zeta_i) \Delta v_i,$$

или

$$S_{yz} = \iiint_V x \delta(x, y, z) dx dy dz. \quad (22.6)$$

Аналогично определяются статические моменты относительно плоскостей xOz и xOy :

$$\left. \begin{aligned} S_{xz} &= \iiint_V y \delta(x, y, z) dx dy dz; \\ S_{xy} &= \iiint_V z \delta(x, y, z) dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (22.7)$$

Подставляя выражения (22.6), (22.7) и (22.4) в зависимости (22.5), получим искомые координаты центра тяжести тела:

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint_V x \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz}; & y_C &= \frac{\iiint_V y \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz}; \\ z_C &= \frac{\iiint_V z \delta(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \delta(x, y, z) dx dy dz}. \end{aligned} \quad (22.8)$$

Для однородного тела ($\delta = \text{const}$) имеем

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{v} \iiint_V x dx dy dz; & y_C &= \frac{1}{v} \iiint_V y dx dy dz; \\ z_C &= \frac{1}{v} \iiint_V z dx dy dz. \end{aligned} \quad (22.9)$$

Если однородное тело имеет плоскость, ось или точку симметрии, то центр тяжести находится соответственно на этой плоскости, оси или в этой точке.

Пример 1. Найти координаты центра тяжести пирамиды, образованной плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями, если плотность в каждой точке численно совпадает с ее ординатой.

Решение. Подставляя в формулы (22.8) $\delta = y$, получим

$$x_C = \frac{\iiint_V xy dx dy dz}{\iiint_V y dx dy dz}; \quad y_C = \frac{\iiint_V y^2 dx dy dz}{\iiint_V y dx dy dz}; \quad z_C = \frac{\iiint_V yz dx dy dz}{\iiint_V y dx dy dz}. \quad (*)$$

Вычислим тройные интегралы:

$$\begin{aligned}\iiint_V y \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y \, dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) y \, dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(1-x)y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^3}{2} - \frac{(1-x)^3}{3} \right] dx = \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 d(1-x) = -\frac{(1-x)^4}{24} \Big|_0^1 = \frac{1}{24};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy \int_0^{1-x-y} dz = -\frac{1}{6} \int_0^1 x (1-x)^3 d(1-x) = \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x-1)(1-x^3) d(1-x) = \frac{1}{6} \int_0^1 [(1-x)^4 - (1-x)^3] d(1-x) = \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{(1-x)^5}{5} - \frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{120}.\end{aligned}$$

В тройных интегралах $\iiint_V xy \, dx \, dy \, dz$ и $\iiint_V yz \, dx \, dy \, dz$ подынтегральные функции и уравнения границ области интегрирования симметричны относительно x и z , поэтому

$$\iiint_V yz \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{120};$$

$$\begin{aligned}\iiint_V y^3 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} y^2 \, dy \int_0^{1-x-y} dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y) y^2 \, dy = \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(1-x)y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^4}{3} - \frac{(1-x)^4}{4} \right] dx = \\ &= -\frac{1}{12} \int_0^1 (1-x)^4 d(1-x) = -\frac{(1-x)^5}{60} \Big|_0^1 = \frac{1}{60}.\end{aligned}$$

Подставляя значения вычисленных тройных интегралов в формулы (*), находим координаты центра тяжести пирамиды:

$$x_c = \frac{1}{5}; \quad y_c = \frac{2}{5}; \quad z_c = \frac{1}{5}.$$

Пример 2. Найти центр тяжести однородного тела, ограниченного сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и верхней частью параболоида $x^2 + y^2 = 4(1-z)$.

Решение. Данное тело симметрично относительно оси Oz . На рис. 22.8 заштрихованы сечения тела координатными плоскостями

V_{xz} и V_{yz} . В плоскости xOy тело имеет своим основанием круг $x^2 + y^2 = 4$. Координаты центра тяжести $x_C = 0$, $y_C = 0$, а

$$z_C = \frac{\iiint_V z \, dz \, dy \, dx}{\iiint_V dz \, dy \, dx}.$$

Для вычисления тройных интегралов переходим к цилиндрическим координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$. Полярный угол φ изме-

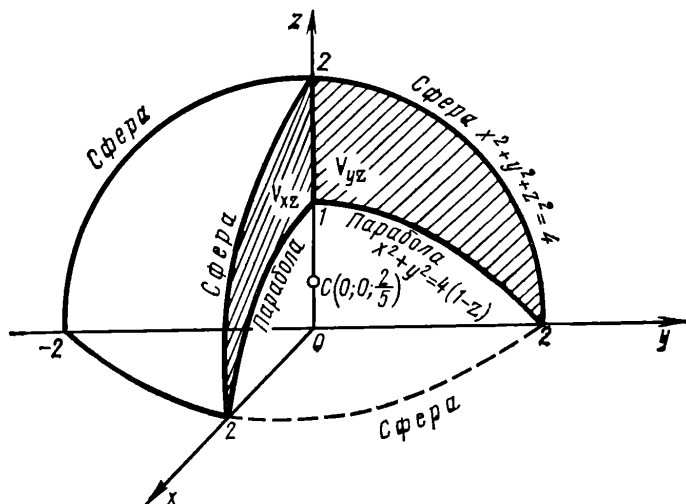


Рис. 22.8

няется в пределах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Областью интегрирования является круг $x^2 + y^2 \leq 4$. Уравнение окружности $x^2 + y^2 = 4$ в полярных координатах имеет вид $r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 4$ или $r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4$, т. е. $r^2 = 4$. Отсюда $r = 2$. Радиус-вектор r изменяется, таким образом, от 0 до 2. Пределы изменения z определим из уравнения параболоида $z = (4 - x^2 - y^2)/4$ и сферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Эти уравнения в цилиндрических координатах соответственно имеют вид $z = (4 - r^2)/4$ и $z = \sqrt{4 - r^2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \iiint_V dz \, dy \, dx &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \, dr \int_{(4-r^2)/4}^{\sqrt{4-r^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 z \Big|_{(4-r^2)/4}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dr = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \left(\sqrt{4-r^2} - \frac{4-r^2}{4} \right) dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(r \sqrt{4-r^2} - r + \frac{r^3}{4} \right) dr = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 r \sqrt{4-r^2} \, dr - \int_0^2 r \, dr + \int_0^2 \frac{r^3}{4} \, dr \right) d\varphi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{2} \int_0^2 (4-r^2)^{1/2} d(4-r^2) - \int_0^2 r dr + \frac{1}{4} \int_0^2 r^3 dr \right] d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3} (4-r^2) \sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{16} \right]_0^2 d\varphi = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} - 2 + 1 \right) d\varphi = \frac{5}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{5}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{10\pi}{3}; \\
\iiint_V z dz dy dx &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_{(4-r^2)/2}^{\sqrt{4-r^2}} z dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \frac{z^2}{2} \Big|_{(4-r^2)/2}^{\sqrt{4-r^2}} r dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \left[4-r^2 - \frac{(4-r^2)^2}{4} \right] dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r \left(4-r^2 - 4 + 2r^2 - \frac{r^4}{4} \right) dr = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(r^3 - \frac{r^5}{4} \right) dr = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24} \right]_0^2 d\varphi = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(4 - \frac{8}{3} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \cdot 2\pi = \frac{4}{3} \pi.
\end{aligned}$$

Итак, $z_C = \frac{4\pi/3}{10\pi/4} = 2/5$. Центр тяжести $C \left(0; 0; \frac{2}{5} \right)$.

§ 4. МОМЕНТ ИНЕРЦИИ ТЕЛА

Аналогично выводу соотношений (22.6) и (22.7) можно найти моменты инерции тела V относительно координатных плоскостей xOy , xOz и yOz :

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \iiint_V z^2 \delta(x, y, z) dx dy dz; \quad I_{xz} = \iiint_V y^2 \delta(x, y, z) dx dy dz; \\
I_{yz} &= \iiint_V x^2 \delta(x, y, z) dx dy dz.
\end{aligned} \tag{22.10}$$

Квадраты расстояния точки $M(x; y; z)$ до осей Ox , Oy и Oz равны соответственно $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$ и $x^2 + y^2$, поэтому моменты инерции тела V относительно координатных осей Ox , Oy и Oz

$$\left. \begin{aligned}
I_x &= \iiint_V (y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz; \\
I_y &= \iiint_V (x^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz; \\
I_z &= \iiint_V (x^2 + y^2) \delta(x, y, z) dx dy dz.
\end{aligned} \right\} \tag{22.11}$$

Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \delta(x, y, z) dx dy dz. \quad (22.12)$$

Из соотношений (22.10), (22.11) и (22.12) следует, что моменты инерции тел связаны следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} I_{xy} + I_{xz} + I_{yz} &= I_0; \\ I_x + I_y + I_z &= 2I_0; \\ I_{xz} + I_{yz} &= I_z; \end{aligned} \quad (22.13)$$

$$I_{xy} + I_{yz} = I_y; \quad I_{xy} + I_{xz} = I_x.$$

Пример 1. Определить момент инерции относительно вершины прямоугольного параллелепипеда с ребрами a , b и c , если плотность его в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от этой вершины: $\delta = k(x^2 + y^2 + z^2)$, где k — заданный коэффициент пропорциональности (рис. 22.9).

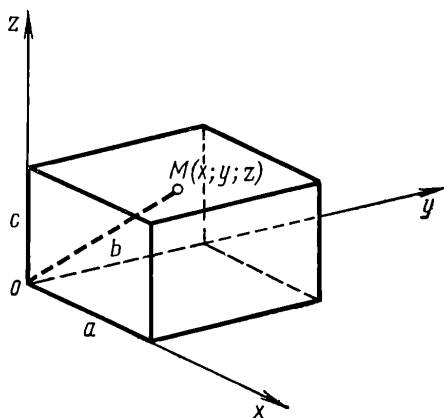


Рис. 22.9

Решение. Согласно соотношению (22.12) имеем:

$$\begin{aligned} I_0 &= k \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz = k \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x^2 + y^2 + z^2)^2 dz = \\ &= k \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c [(x^2 + y^2)^2 + 2(x^2 + y^2)z^2 + z^4] dz = \\ &= k \int_0^a dx \int_0^b dy \left[(x^2 + y^2)^2 z + \frac{2}{3} (x^2 + y^2) z^3 + \frac{z^5}{5} \right]_{z=0}^{z=c} dy = \\ &= kc \int_0^a dx \int_0^b dy \left[x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + \frac{2}{3} c^2 (x^2 + y^2) + \frac{c^4}{5} \right] dy = \\ &= kc \int_0^a \left[\left(x^4 + \frac{2}{3} c^2 x^2 + \frac{c^4}{5} \right) y + \frac{2}{3} \left(x^2 + \frac{c^2}{3} \right) y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{y=0}^{y=b} dx = \\ &= kbc \int_0^a \left[x^4 + \frac{2}{3} c^2 x^2 + \frac{c^4}{5} + \frac{2}{3} b^2 \left(x^2 + \frac{c^2}{3} \right) + \frac{b^4}{5} \right] dx = \\ &= kbc \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{9} (b^2 + c^2) x^3 + \frac{b^4 + c^4}{5} x + \frac{2b^2 c^2}{9} x \right]_0^a = \\ &= kabc \left[\frac{1}{5} (a^4 + b^4 + c^4) + \frac{2}{9} (a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2) \right] \text{ ед}^4. \end{aligned}$$

Пример 2. Определить момент инерции однородного шара радиуса R и плотности δ относительно касательной прямой.

Решение. Поместим начало координат в точку касания. Оси Ox и Oy направим по взаимно перпендикулярным касательным, а ось Oz — по диаметру шара. Тогда следует найти моменты инерции I_x или I_y . Уравнение сферы относительно выбранной системы осей прямоугольных координат имеет вид $x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$, или $z = R \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, а в цилиндрических координатах $z = R \pm \sqrt{R^2 - \rho^2}$. Момент инерции I_x определяем по формуле (22.11), преобразуя двойной интеграл к цилиндрическим координатам. Ввиду симметрии, вычисляем момент инерции четверти шара в I октанте. Проекция этой части шара на плоскость xOy есть четверть круга $x^2 + y^2 \leq R^2$, или в цилиндрических координатах $\rho \leq R$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} I_x &= \delta \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz = \delta \iiint_V (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) \rho d\rho d\varphi dz = \\ &= \delta \int_0^{\pi/2} \varphi \int_0^{\bar{R}} \rho d\rho \int_{R - \sqrt{R^2 - \rho^2}}^{R + \sqrt{R^2 - \rho^2}} (\rho^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz = \\ &= \delta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \left[z\rho^2 \sin^2 \varphi + \frac{z^3}{3} \right]_{z=R - \sqrt{R^2 - \rho^2}}^{z=R + \sqrt{R^2 - \rho^2}} \rho d\rho = \\ &= \delta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R \left[2\rho^3 \sqrt{R^2 - \rho^2} \sin^2 \varphi + 2\rho \left(R^2 \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{1}{3} \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} \right) \right] d\rho. \end{aligned}$$

Вычислим каждое слагаемое внутреннего интеграла:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \varphi \int_0^R \rho^3 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho &= \sin^2 \varphi \int_0^R (R^2 - \rho^2 - R^2) \sqrt{R^2 - \rho^2} d(R^2 - \rho^2) = \\ &= \sin^2 \varphi \left[\int_0^R (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d(R^2 - \rho^2) - R^2 \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) \right] = \\ &= \sin^2 \varphi \left[\frac{2}{5} (R^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{2R^2}{3} (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^R = \frac{4R^5}{15} \sin^2 \varphi; \\ 2R^2 \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho &= -R^2 \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}} d(R^2 - \rho^2) = \\ &= -\frac{2R^2 (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^R = \frac{2R^5}{3}; \\ \frac{2}{3} \int_0^R \rho \sqrt{(R^2 - \rho^2)^3} d\rho &= -\frac{1}{3} \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d(R^2 - \rho^2) = \\ &= -\frac{2(R^2 - \rho^2)^{\frac{5}{2}}}{15} \Big|_0^R = \frac{2R^5}{15}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} I_x &= \delta \int_0^{\pi/2} \left(\frac{4R^5}{15} \sin^2 \varphi + \frac{2R^5}{3} + \frac{2R^5}{15} \right) d\varphi = \\ &= \delta R^5 \left(\frac{4}{15} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{2}{15} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{7}{15} \pi \delta R^5,\end{aligned}$$

откуда

$$I_x = \frac{28}{15} \pi \delta R^5 \text{ ед}^4.$$

Так как масса однородного шара $m = \frac{4}{3} \pi \delta R^3$, то

$$I_x = \frac{7}{5} m R^2 \text{ ед}^4.$$

Упражнения

1. Вычислить массу пирамиды, образованной плоскостью $x + y + z = 1$ и координатными плоскостями, если плотность в каждой ее точке численно совпадает с ординатой этой точки.

Отв. $1/24$ куб. ед.

2. Найти центр тяжести однородной усеченной призмы, ограниченной плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=1$, $y=1$, $x+y+z=3$.

Отв. $x_C = y_C = 11/24$, $z_C = 25/24$.

3. Найти центр тяжести полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ($z \geq 0$).

Отв. $x_C = 0$; $y_C = 0$; $z_C = 3/4$.

4. Найти центр тяжести тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 3z^2$ при условии, что $z > 0$.

Отв. $x_C = 0$; $y_C = 0$; $z_C = 9/16$.

5. Найти момент инерции относительно оси Oz тела, ограниченного плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=3$ и $z=4$.

Отв. $9 \frac{5}{11} \text{ ед}^4$.

6. Определить момент инерции относительно центра шара радиуса R , если его плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от диаметральной плоскости (коэффициент пропорциональности равен k).

Отв. $\frac{4}{21} \pi k R^7 \text{ ед}^4$.

ВАЖНЕЙШИЕ ФОРМУЛЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Алгебра

Основные законы действий

Переместительный (коммутативный) для сложения $a + b = b + a$;

Переместительный для умножения $ab = ba$;

Сочетательный (ассоциативный) для сложения $a + (b + c) = (a + b) + c$;

Сочетательный для умножения $a(bc) = (ab)c$;

Распределительный (дистрибутивный) $(a + b)c = ac + bc$.

Действия со степенями

Если a — конечная величина, то

$$a^0 = 1;$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n;$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-n};$$

$$a^n a^m = a^{n+m};$$

$$(a^n)^m = a^{mn} = (a^m)^n;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3}b^3 +$$

$$+ \dots + (-1)^k \frac{n(n-1)(n-2) \dots [n-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} a^{n-k}b^k + \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} a b^{n-1} + (-1)^n b^n.$$

Действия с корнями

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}; \quad (\sqrt[n]{a})^n = a;$$

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c};$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = a^{-\frac{1}{n}};$$

$$\sqrt[n]{a}^{-1} = a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}};$$

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a} &= \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}}; \\ \sqrt[n]{a^m} &= a^{\frac{m}{n}}; \\ \sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} &= \sqrt[nm]{a^{n+m}}; \\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a}; \\ \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.\end{aligned}$$

Алгебраические уравнения

Квадратное уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ имеет корни

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$ ($b = 2k$) имеет корни

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Квадратное уравнение вида $x^2 + 2kx + q = 0$ ($p = 2k$) имеет корни

$$x_{1,2} = -k \pm \sqrt{k^2 - q}.$$

Если коэффициенты уравнений действительные и $b^2 < 4ac$ (или соответственно $p^2 < 4q$, $k^2 < ac$, $k^2 < q$), то корни — сопряженные комплексные числа.

Основные свойства корней квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} = -p; \\ x_1 x_2 &= \frac{c}{a} = q.\end{aligned}$$

Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ имеет корни

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2a}(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}; \\ x_{3,4} &= \pm \sqrt{\frac{1}{2a}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}.\end{aligned}$$

Логарифмы

Логарифмом числа N называется показатель степени n , в которую нужно возвести основание a ($a > 1$), чтобы получить число N .

Если $a^n = N$, то $n = \log_a N$.

Основные свойства логарифмов:

$$\begin{aligned}a^{\log_a N} &= N; \\ \log_a (uv) &= \log_a u + \log_a v;\end{aligned}$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v;$$

$$\log_a u^n = n \log_a u;$$

$$\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u;$$

$$\log_a 1 = 0;$$

$$\log_a a = 1;$$

$$\log_a N \cdot \log_c a = \log_b N \cdot \log_c b.$$

Для технических расчетов применяются десятичные логарифмы с основанием $a=10$. Вместо $\log_{10} N$ установлено обозначение $\lg N$. Переход от десятичного логарифма к натуральному осуществляется по формуле

$$\lg N = \lg e \cdot \ln N = M \ln N,$$

где $M=0,4343\dots$; e — основание натуральных логарифмов, равное $2,7182\dots$.

Переход от натурального логарифма к десятичному осуществляется по формуле

$$\ln N = \frac{1}{M} \lg N, \text{ где } \frac{1}{M} = 2,303\dots$$

Соединения

Число *размещений*, т. е. соединений, различающихся либо самими элементами, либо их порядком, вычисляется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

где $n!$ — символ факториала, т. е.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Число *перестановок*, т. е. соединений в каждое из которых входят все n элементов и поэтому сами соединения отличаются лишь порядком элементов, вычисляется по формуле

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

Число *сочетаний* из n элементов по m , т. е. соединений, различающихся только составом — иначе самими элементами, из которых образованы соединения (порядок элементов не имеет значения), вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! (n-m)!}.$$

Например, если даны 3 элемента a, b, c , то:

1) размещения из них по 2 элемента ab, ac, bc, ba, ca, cb ;

2) перестановки $abc, bca, cab, bac, bac, acb$;

3) сочетания по 2 элемента ab, ac, bc .

Основные свойства сочетаний:

$$C_n^1 = n; C_n^n = C_n^0 = 1; C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия.

Любой член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n-1),$$

где a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии, n — номер взятого члена.

Сумма S_n первых n членов арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) n}{2}.$$

Геометрическая прогрессия.

Любой член геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 q^{n-1},$$

где a_1 — первый член прогрессии; q — знаменатель прогрессии; n — номер взятого члена.

Сумма S_n первых n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q};$$

Сумма S членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии при $-1 < q < 1$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Геометрия

Площадь F квадрата вычисляется по формулам

$$F = a^2, \quad F = \frac{1}{2} d^2,$$

где a — сторона квадрата; d — диагональ.

Площадь F прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле

$$F = ab.$$

Площадь F ромба вычисляется по формулам

$$F = ah, \quad F = a^2 \sin \alpha, \quad F = \frac{1}{2} d_1 d_2,$$

где a — сторона ромба; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; α — угол между сторонами.

Площадь F параллелограмма вычисляется по формулам

$$F = ah, \quad F = ab \sin \alpha,$$

где a, b — стороны параллелограмма; α — угол между ними; h — высота, опущенная на сторону a .

Площадь F трапеции вычисляется по формулам

$$F = \frac{a+b}{2} h, \quad F = ch,$$

где a, b — основания трапеции; h — высота; c — средняя линия.

Площадь F любого треугольника вычисляется по формулам

$$F = \frac{1}{2} ah, \quad F = \frac{1}{2} ab \sin C,$$

где a, b, c — стороны треугольника; h — высота; C — угол, лежащий против стороны c , или по формуле Герона

$$F = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad \text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Длина L окружности радиуса r и диаметра d вычисляется по формуле

$$L = 2\pi r = \pi d.$$

Площадь круга вычисляется по формулам

$$F = \pi r^2, \quad F = \frac{\pi d^2}{4},$$

где r — радиус; d — диаметр круга.

Площадь F сектора круга вычисляется по формулам

$$F = \frac{1}{2} r L_n, \quad F = \frac{\pi r^2 n}{360},$$

где r — радиус, n — градусная мера центрального угла, L_n — длина дуги, составляющей угол n градусов.

Теорема Пифагора. В прямоугольном треугольнике с гипотенузой a и катетами b и c :

$$a^2 = b^2 + c^2; \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}; \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Объем V прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формулам

$$V = abc, \quad V = Fh,$$

где a, b, c — длины ребер; F — площадь основания, h — высота параллелепипеда.

Объем V пирамиды с площадью основания F и высотой h вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} Fh.$$

Боковая поверхность S правильной пирамиды с полупериметром p и апофемой a вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} pa.$$

Объем V цилиндра с радиусом основания r и высотой h вычисляется по формуле

$$V = \pi r^2 h.$$

Боковая поверхность S круглого цилиндра с радиусом основания r и высотой h вычисляется по формуле

$$S = 2\pi rh.$$

Объем V конуса вычисляется по формулам

$$V = \frac{1}{3} Fh, \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

где F — площадь основания; r — радиус основания; h — высота конуса.

Боковая поверхность S конуса вычисляется по формулам

$$S = \frac{1}{2} Ll, \quad S = \pi rl,$$

где r — радиус основания; L — длина окружности основания; l — длина образующей конуса.

Объем V шара, имеющего радиус r (диаметр d), вычисляется по формулам

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3, \quad V = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

Поверхность S сферы (шара), имеющей радиус r (диаметр d), вычисляется по формулам

$$S = 4\pi r^2, \quad S = \pi d^2.$$

Тригонометрия

Измерение углов

Известны два способа измерения величины угла.

Градусное измерение. За единицу угла принимается $\frac{1}{360}$ полного оборота. Эта единица называется *градусом*.

Радийное измерение. За единицу угла принимается центральный угол, вырезающий на окружности дугу, длина которой равна ее радиусу; эта единица называется *радианом*.

Основное соотношение между двумя этими единицами измерения дается уравнением

$$180 \text{ градусов} = \pi \text{ радианов},$$

где $\pi = 3,14159 \dots$

$$1 \text{ градус} = \frac{\pi}{180} \text{ радиана} = 0,017453 \dots \text{ радиана};$$

$$1 \text{ радиан} = \frac{180}{\pi} \text{ градусов} = 57^{\circ}17'45''.$$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad \sin \alpha \operatorname{cosec} \alpha = 1; \quad \cos \alpha \sec \alpha = 1;$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha; \quad \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Выражение одной тригонометрической функции через другую (того же угла)

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha} = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha};$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sec \alpha} = \frac{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} = \pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1} = \frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}} = \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}.$$

Функции суммы и разности углов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \pm 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Функции половинного угла

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Функции кратных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}.$$

Сумма и разность функций

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{ctg} \beta = \pm \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cos \beta}.$$

Некоторые важные соотношения

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha);$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha).$$

Эти формулы полезны при решении тригонометрических уравнений и интегрировании тригонометрических функций.

Решение треугольников

Прямоугольный треугольник: a, b — катеты, c — гипотенуза, A, B — углы против катетов a, b .

Основные соотношения:

$$\begin{aligned} a &= c \sin A = c \cos B; & b &= c \sin B = c \cos A; \\ a &= b \operatorname{tg} A = b \operatorname{ctg} B; & b &= a \operatorname{tg} B = a \operatorname{ctg} A. \end{aligned}$$

Даны	Формулы для нахождения остальных элементов		
c, A	$B = 90^\circ - A$	$a = c \sin A$	$b = c \cos A$
a, A	$B = 90^\circ - A$	$b = a \operatorname{ctg} A$	$c = \frac{a}{\sin A}$
a, c	$\sin A = \frac{a}{c}$	$b = c \cos A$	$B = 90^\circ - A$
a, b	$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$	$c = \frac{a}{\sin A}$	$B = 90^\circ - A$

Косоугольный треугольник: a, b, c — стороны, A, B, C — противоположные им углы, R — радиус описанной окружности.

Основные соотношения:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{теорема синусов});$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{теорема косинусов});$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} \quad (\text{теорема тангенсов}).$$

Значения тригонометрических функций для углов, кратных 30° и 45° ($\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{4}$)

Углы α		Функции					
в градусах	в радианах	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
0°	0	0	1	0	$\pm \infty$	1	$\pm \infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	1
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
180°	π	0	-1	0	$\pm \infty$	-1	$\pm \infty$

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Названия	Буквы	Названия
<i>A a</i>	А	<i>N n</i>	Эн
<i>B b</i>	Бэ	<i>O o</i>	О
<i>C c</i>	Цэ	<i>P p</i>	Пэ
<i>D d</i>	Дэ	<i>Q q</i>	Ку
<i>E e</i>	Э	<i>R r</i>	Эр
<i>F f</i>	Эф	<i>S s</i>	Эс
<i>G g</i>	Гэ(жэ)*	<i>T t</i>	Тэ
<i>H h</i>	Ха(аш)*	<i>U u</i>	У
<i>I i</i>	И	<i>V v</i>	Вэ
<i>J j</i>	Йот(жи)*	<i>W w</i>	Дубль-вэ
<i>K k</i>	Ка	<i>X x</i>	Икс
<i>L l</i>	Эль	<i>Y y</i>	Игрек
<i>M m</i>	Эм	<i>Z z</i>	Зэт

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Названия	Буквы	Названия
<i>Α α</i>	Альфа	<i>Ν ν</i>	Ню
<i>Β β</i>	Бэта	<i>Ξ ξ</i>	Кси
<i>Γ γ</i>	Гамма	<i>Ο ο</i>	Омикрон
<i>Δ δ</i>	Дельта	<i>Π π</i>	Пи
<i>Ε ε</i>	Эпсилон	<i>Ρ ρ</i>	Ро
<i>Ζ ζ</i>	Дзета	<i>Σ σ</i>	Сигма
<i>Η η</i>	Эта	<i>Τ τ</i>	Тау
<i>Θ θ</i>	Тэта	<i>Υ υ</i>	Ипсилон
<i>Ι ι</i>	Йота	<i>Φ φ</i>	Фи
<i>Κ κ</i>	Каппа	<i>Χ χ</i>	Хи
<i>Λ λ</i>	Лямбда	<i>Ψ ψ</i>	Пси
<i>Μ μ</i>	Мю	<i>Ω ω</i>	Омега

* В скобках даны французские названия этих букв.

- Абеля теорема 238, 239
 Абсолютно сходящийся несобственный интеграл 159, 163
 — — ряд 234
 Адиабатическое расширение газов 201, 202
 Аналитическая функция 247
 Асимптота 34

 Бесконечная геометрическая прогрессия 219, 220
 Биномиальный дифференциал 114
 — ряд 250
 Блок-схема определения максимума функции 20

 Вертикальная асимптота 34
 Верхний предел интегрирования 118
 Верхняя интегральная сумма 121
 Вогнутость 30
 Второе приращение 298
 Выпуклость 30

 Гармоника 263
 Гармонический анализ 282
 — ряд 220
 Геометрический смысл двойного интеграла 332
 — — несобственного интеграла 164—167
 — — определенного интеграла 124, 125
 — — основных теорем дифференциального исчисления 10—12
 — — тройного интеграла 374
 — — частной производной 293, 294
 Геометрическое изображение функции двух переменных 285, 286
 Горизонтальная асимптота 34
 Границы области 285

 Даламбера признак 224
 Дарбу суммы 121
 Двойной интеграл 331
 — —, вычисление в декартовых координатах 336—343
 — —, — — полярных координатах 348—350
 — —, основные свойства 333—335
 Двукратный интеграл 337, 338
 Двумерная интегральная сумма 331
 Диаметр области 330
 Дирихле условия 268, 269
 Дискриминант 326

 Дифференциал высшего порядка функции двух переменных 314, 315
 — дуги 183
 Дифференцирование неявной функции 306
 — — — нескольких переменных 307
 — сложной функции нескольких переменных 303, 304
 — степенного ряда 242
 Дифференцируемая функция 299
 Длина дуги 182—184
 Достаточные признаки дифференцируемости функции двух переменных 299
 — — существования экстремума 18, 20
 — — — функции двух переменных 326, 327

 Задача о вычислении времени истечения жидкости 205, 206
 — — — давления жидкости 202, 203
 — — — деформации пружины 198, 199
 — — — массы стержня 206
 — — — пути, пройденного телом 199, 200
 — — — работы при расширении газа 201, 202
 — — — — силы 195, 196
 — — — — силы притяжения 200, 201
 — — — площади криволинейной трапеции 118, 119
 — — об объеме цилиндрического тела 330, 331
 Замена переменной в определенном интеграле 134
 Знакопеременный ряд 233
 Знакопередающий ряд 230

 Изотермическое расширение газов 201
 Инвариантность формы полного дифференциала 310
 Интегральная кривая 52
 — сумма 122
 Интегрирование 52
 — биномиальных дифференциалов 114—116
 — иррациональных функций 102, 103, 105—107
 — непосредственное 57, 132
 — периодической функции на отрезке длиной 2π 267
 — по частям 69, 70, 138
 — приближенное, см. соотв. метод
 — простейших дробей 76—83
 — рациональных функций 74, 75, 83

- способом замены переменной 61, 134
- степенного ряда 242
- тригонометрических функций 86—96
- функций вида $R(\sin x, \cos x)$ 97—99
- —, содержащих квадратный трех-
член 64, 67
- — четных и нечетных функций в про-
межутке $(-a, a)$ 271, 272
- Интегрируемая функция 123
- Интервал интегрирования 123
- сходимости 240
- Интервалы монотонности 28
- Исследование функций на возрастание и
убывание 29
- — — экстремум 19, 21
- — вообще 37

- Касательная плоскость 317
- Координатные линии 336, 348
- поверхности 379, 382
- Коши интегральный признак 227
- радикальный признак 226
- теорема 14
- Коэффициент степенного ряда 238
- Критическая точка 17

- Лагранжа теорема** 12
- формула 12
- Лейбница признак 230
- Линии уровня 287
- Логарифмический ряд 251
- Лопиталья правило 42, 45

- Маклорена ряд** 247
- — для функции двух переменных
321, 322
- формула 246
- Максимум 8
- функции двух переменных 324
- Масса плоской фигуры 361
- тела 374, 392
- Метод интегрирования подстановкой 61,
134
- — по частям 69, 70, 138
- неопределенных коэффициентов 75,
260
- парабол 146—149
- подстановки числовых значений 76
- последовательного дифференцирова-
ния 260
- прямоугольников 140, 141
- трапеций 144
- Механический смысл теоремы Лагранжа**
14
- — — Ролля 12
- Минимум 8
- функции двух переменных 324
- Многозначная функция нескольких пе-
ременных 284

- Момент инерции материальной точки**
213, 370
- — — плоской кривой 213
- — — фигуры 213, 370
- — системы материальных точек 213,
370
- — тела 398, 399

- Наибольшее и наименьшее значения**
функции 22
- Наклонная асимптота 34, 35
- Независимость частных производных от
порядка дифференцирования 312
- Необходимый признак сходимости ряда
219
- — экстремума 17
- — — функции двух переменных 326
- Неопределенный интеграл 52
- —, свойства 53, 54
- Неправильная рациональная дробь 74
- Непрерывность функции двух перемен-
ных в области 290
- — — — — точке 290, 291
- Несобственный интеграл 154
- — от разрывной функции 160, 161
- — с бесконечными пределами 154,
155
- Неявная функция 284, 306
- Нижний предел интегрирования 118
- Нижняя интегральная сумма 120
- Нормаль к поверхности 319
- Ньютона-Лейбница формула 127

- Область определения функции несколь-
ких переменных** 284, 285
- сходимости ряда 238
- Общий член ряда 217
- Объем тела вращения 178, 179
- —, вычисление с помощью двойного
интеграла 331, 354, 355
- —, — — — тройного интеграла 386,
388, 389
- — по известным поперечным сече-
ниям 177, 178
- Однозначная функция нескольких пе-
ременных 284
- Определенный интеграл 118, 123
- —, свойства 128—132
- Особая точка 160
- Остаток ряда 218
- Остаточный член формулы Тейлора 245
- Оценки относительной погрешности
суммы, разности, произведения, част-
ного, степени и корня 300.

- Первообразная функция** 50
- Период 263
- Периодическая функция 263

Плотность 361

Площадь плоской фигуры, вычисление с помощью двойного интеграла 353
— — — — — определенного интеграла 169, 170, 174—176
— поверхности 357, 358
— вращения 186—188
Подынтегральная функция 52
Подынтегральное выражение 52
Полная производная 309—311
Полное приращение 291, 295, 296
Полный дифференциал 295, 296, 310, 311
Полярный момент инерции 370
Правило исследования функций на экстремум с помощью второй производной 21
— — — — — — — — — производной 19
— — — — — — — — — двух переменных на экстремум 327
— — — — — — — — — определения наибольшего и наименьшего значений функции 22
Правильная рациональная дробь 74
Практический гармонический анализ 282
Предел функции двух переменных 288
Преобразование двойного интеграла к полярным координатам 349
— тройного интеграла к сферическим координатам 382
— — — — — — — — — цилиндрическим координатам 380
Приближенное решение уравнений с помощью рядов 260
Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала 299, 300
— — — — — рядов 252—258
Признак вогнутости кривой 30
— возрастания функции 28
— выпуклости кривой 30
— постоянства функции 27
— разложимости функции в ряд Тейлора 247
— сравнения рядов 222
— существования точки перегиба 31
— сходимости знакопеременного ряда 233
— — — — — — — — — знакопеременного ряда 230
— — — — — — — — — убывания функции 28
Признаки сходимости несобственных интегралов 157—159, 162, 163
Произведение ряда на число 235
— рядов 236, 237
Простейшие дроби 75

Радиус сходимости 240

Разложение в ряд Маклорена $\arctg x$ 251
— — — — — e^x 248
— — — — — $(1+x)^n$ 250
— — — — — $\ln(1+x)$ 251
— — — — — $\cos x$ 250
— — — — — $\sin x$ 249

— — — Фурье неперiodической функции 269, 270
— — — — — нечетной функции 272, 273
— — — — — четной функции 271, 272
— — — — — функций с периодом 21, 278, 280
— — — — — рациональной дроби на простейшие 75
Раскрытие неопределенности 42, 45—48
Расходящийся несобственный интеграл 154, 160
— ряд 217, 238
Рациональная дробь 74
Роль теорема 10, 11

Связь между неопределенным и определенным интегралом 127
— — — — — интегралом, определенным интегралом и производной 151, 152
Семейство линий уровня 287
Символы функциональной подстановки 127
Симпсона формулы 147, 149
Сложная функция нескольких переменных 284
Среднее гармоническое 220
— значение функции 336
Средняя плотность 361
Статистический момент материальной точки 207, 362
— — — — — плоской кривой 208
— — — — — фигуры 211, 363
— — — — — системы материальных точек 207, 362
— — — — — тела 394, 395
Степенной ряд 238
Сумма двух сходящихся рядов 235, 236
— ряда 217
— членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии 220
Сферическая система координат 382
Схема применения определенного интеграла 194, 195
Сходящийся несобственный интеграл 154, 160
— ряд 217, 238
— — — — — свойства 221, 236

Таблица неопределенных интегралов 55, 56
Тейлора ряд 247
— — — — — для функции нескольких переменных 322
— — — — — формула для многочлена 244
— — — — — произвольной функции 245
— — — — — функции двух переменных 323
Теорема о выпуклости и вогнутости кривой 30
— — — — — дифференцировании и интегрировании степенного ряда 242
— — — — — об отношении приращения двух функций 14

- — оценке двойного интеграла 335
- — — тройного интеграла 375
- существования двойного интеграла от непрерывной функции 332
- Теоремы дифференциального исчисления**
 - основные 9, 10, 12, 14
 - о возрастании и убывании функции в интервале 27, 28
 - раскрытия неопределенностей 42, 45
 - свойствах сходящихся рядов 218, 221
 - сходимости несобственных интегралов 157—159, 162, 163
 - об экстремуме функции 18, 20
- Точка максимума** 8
- минимума 8
- перегиба 31
- стационарности 28
- сходимости ряда 238
- экстремума 8
- Трехкратный интеграл** 377
- Трехмерная интегральная сумма** 373
- Тригонометрические подстановки** 99, 100
- Тригонометрический многочлен** 264
- ряд 265
- Тройной интеграл** 373
- —, вычисление в декартовых координатах 375—377
- —, — — сферических координатах 382, 383
- —, — — цилиндрических координатах 379, 380
- —, основные свойства 374, 375
- Универсальная тригонометрическая подстановка** 98
- Уравнение касательной плоскости к поверхности** 318
- Уравнения нормали к поверхности** 319
- Условно сходящийся ряд** 234

- Ферма теорема** 9
- Физический смысл двойного интеграла** 333
- — тройного интеграла 374
- Формула конечных приращений** 12
- приведения 83
- Формулы прямоугольников** 141
- трапеций 144, 145
- Функциональный ряд** 238
- Функция многих переменных** 284
- Фурье коэффициенты** 267
- ряд 267, *см. также* Разложение в ряд Фурье

- Целая рациональная функция**
- Центр тяжести плоской кривой** 208, 209
- — — фигуры 211, 365, 366
- — системы материальных точек 208
- — тела 394, 395
- Цилиндрическая система координат** 379
- Цилиндроид** 332

- Частичная сумма ряда** 217
- Частичный отрезок** 120
- Частная производная** 292
- — высшего порядка 311, 312
- Частное значение функции** 285
- приращение 291, 294
- Частный дифференциал** 296
- Числовой ряд** 217
- Член ряда** 217

- Эйлера подстановки** 109, 111, 112
- Эйлера — Фурье формулы** 267, 269
- Экспоненциальный ряд** 248
- Экстремум** 8, 17, 18, 20
- функции двух переменных 324—327
- Экстремальное значение** 8

- Явная функция нескольких переменных** 284

Кирилл Константинович Пономарев
КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ
для техников-программистов
ч. II

Редактор Ж. И. Яковлева. Художник Л. Г. Бакушева. Художественный редактор В. И. Пономаренко. Технический редактор Э. М. Чижевский. Корректор Г. А. Четкина

Сдано в набор 2/I-74 г. Подп. к печати 15/VII-74 г. Формат 60×90/16.
Бум. тип. № 2. Объем 26 печ. л. Усл. п. л. 26. Уч.-изд. л. 23,70.
Изд. № ФМ-5166. Тираж 30 000 экз. Цена 89 коп. Зак. № 1173.

План выпуска литературы для вузов и техникумов
издательства «Высшая школа» на 1974 г. Позиция № 249
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Ордена Трудового Красного Знамени
Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова
Союзполиграфпрома при Государственном комитете
Совета Министров СССР по делам издательства,
полиграфии и книжной торговли.
Москва, М-54, Валуевская, 28

